



Stabilitet af tynde skalkonstruktioner

Laustsen, Bjarke

Publication date:
2016

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link back to DTU Orbit](#)

Citation (APA):
Laustsen, B. (2016). *Stabilitet af tynde skalkonstruktioner*. Technical University of Denmark, Department of Civil Engineering. B Y G D T U. Rapport No. R-348

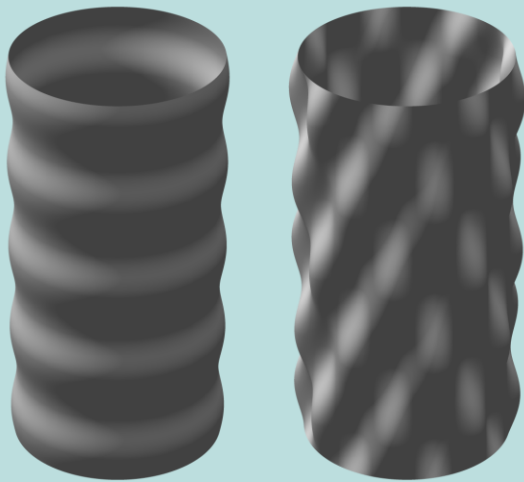
General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Stabilitet af tynde skalkonstruktioner



Bjarke Laustsen

PhD Thesis

Department of Civil Engineering
2016

DTU Civil Engineering Report R-348

Stabilitet af tynde skalkonstruktioner

Bjarke Laustsen

Ph.d.-afhandling

Institut for Byggeri og Anlæg
Danmarks Tekniske Universitet

2016

Stabilitet af tynde skalkonstruktioner

© 2016 Bjarke Laustsen

Tryk: GraphicCo

Institut for Byggeri og Anlæg

Danmarks Tekniske Universitet

Byg Rapport R-348

ISBN: 9788778774385

ISSN: 1601-2917

Forord

Denne afhandling er indleveret som en delvis opfyldelse af kravet til den danske ErhvervsPhD-grad. Arbejdet er udført på DTU Byg, Institut for Byggeri og Anlæg, og ved rådgivningsvirksomheden ALECTIA A/S.

Fra DTU er arbejdet udført under vejledning af først docent emeritus Henning Agerskov og senere af professor Jeppe Jönsson. Fra ALECTIA A/S er arbejdet vejledt af civilingeniør Jesper Gath, afdelingsleder for konstruktioner og civilingeniør, ph.d. Thomas Hansen.

Jeg vil rette en stor tak til professor emeritus, dr. techn. Mogens Peter Nielsen, som med inspiration og personlighed har været en grundsten for projektet. Desuden vil jeg takke lektor emeritus Leif Otto Nielsen for hans råd og engagement.

Derudover vil jeg takke ALECTIA-Fonden og Knud Højgaards Find som sammen med Innovationsfonden har finansieret projektet.

Afhandlingen blev indsendt 3. december 2015 og forsvaret 15. april 2016. Bedømmelsesudvalget bestod af professor Linh Cao Hoang, Danmarks Tekniske Universitet, professor Arne Aalberg, Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet og Mikael Wimpffen Bræstrup, ph.d., Rambøll Gruppen A/S.

I forhold til den indsendte version af afhandlingen er flere mindre redaktionelle rettelser samt flere mindre bemærkninger fra bedømmelsesudvalget implementeret.

Fredrikstad, juli 2016

Bjarke Laustsen

Resumé

Denne afhandling omhandler stabilitetsteori og dens anvendelse på tynde imperfekte skaller. Tynde og slanke konstruktioner anvendes ofte i bærende konstruktioner, hvor det mest benyttede materiale er metal, især stål og aluminium, men der udføres også mange tynde skalkonstruktioner i beton. Denne afhandling omhandler kun stabilitetsberegninger for statisk konservative problemer.

Stabilitetsteori for skaller betragtes af mange konstruktionsingeniører som et svært og kompliceret emne. Derfor er der i denne afhandling udviklet en simpel og systematisk metode til stabilitetsbestemmelse for skalkonstruktioner, hvor der kun kræves kendskab til tensornotation og elementær variationsregning.

I første del af afhandlingen er den nye teori benyttet til udvikling af en stabilitetsteori. Den ligevægtstilstand hvis stabilitet ønskes undersøgt kan ofte bestemmes vha. en lineær teori. Her er forskydningskræfternes bidrag til deformationer negligeret, og ligevægt er opskrevet i den udeformerede tilstand. Den klassiske stabilitetsteori fremkommer vha. den nye teori ved at opstille ligevægtsligninger for nærliggende ligevægtstilstande. Disse fremkommer ved variation af stedvektoren.

Teorien kræver, som alle andre skalteorier, en række antagelser og simplificeringer for at opretholde en vis overskuelighed. Ved at anvende variationsregning opnås den fordel, at kun de nødvendige led fremkommer. Således er det undervejs i udledningen ikke nødvendigt at skelne mellem små og negligerbare størrelser og de størrelser, som er styrende.

Desuden udvikles en tilnærmet ikke-lineære teori, hvor det bliver vist, hvordan der kan tages hensyn til imperfektioner.

I anden del af afhandlingen benyttes den udledte teori på en aksialt belastet cirkulær cylinder-skål. De numeriske beregninger udføres vha. differensmetoden. Den perfekte skål undersøges ved en egenværdianalyse og to imperfektionsformers betydning for den kritiske last bestemmes ved en iterativ løsning.

Summary

This thesis deals with the stability theory and its application on thin imperfect shell structures. Thin and slender structures are often used in modern load-bearing structures where the common material is a metal, particularly steel or aluminum. This thesis only deals with stability theory for conservative systems.

Stability theory is by many structural engineers considered a difficult and complicated subject. Therefore in this thesis a simple and systematic method has been developed which only requires knowledge on tensor analysis and elementary calculus of variations.

In the first part of the thesis the new theory has been used to develop a theory of stability. The equilibrium system, the stability of which is considered, may often be investigated by a linear theory. In this the effect of shear forces in the direction of the shell normal are neglected and equilibrium is formulated in the undeformed configuration. The classical theory of stability evolves by formulating equilibrium conditions for adjacent configurations. These are created by means of a first variation of the position vector.

The present theory requires, as all shell theories, a number of assumptions and simplifications in order to obtain a kind of clearness. By using calculus of variations one has the advantage that only those terms which are important appear in the equations. Thus one does not need to estimate the important parameters and those unimportant.

In the first part also an approximate non-linear theory is formulated. This theory may also take into account imperfections.

In the second part of the thesis the new theory is used in a calculation of a circular cylindrical shell axially loaded. The numerical solution is carried out by means of difference equations. The eigen-value problem is solved and furthermore two kinds of imperfections and their influence on the load-carrying capacity are analyzed.

Indhold

Symbolliste	xiii
-------------------	------

1 Indledning.....	1
1.1 Definition af en skalkonstruktion	1
1.2 Lineære teorier	2
1.2.1 Udviklingen	3
1.2.2 Lineær skalteori	5
1.3 Stabilitetsteori	7
1.3.1 Udviklingen	11
1.4 Ikke-lineære teorier.....	12
1.4.1 Udviklingen	14

DEL 1 GENEREL SKALTEORI

2 Grundlag.....	21
2.1 Metrik	21
2.2 Længde- og arealforhold	22
2.3 Krumningsforhold.....	25
2.3.1 Krumningen af midterfladen.....	26
2.3.2 Normalkrumning	27
2.3.3 Torsion	27
2.4 Christoffel-symboler.....	28
2.5 Kovariant differentiation	29
3 Ligevægtsligningerne	31
3.1 Snitkræfter i en skalkonstruktion	31
3.2 Ligevægtsligninger.....	35
4 Stabilitetsteori – Ligevægtsmetoden.....	39
4.1 Variation af geometriske parametre	39
4.2 Variation af ligevægtsligningerne	44
4.2.1 Transformerede belastninger og snitkræfter.....	44
4.2.2 Indre ligevægtsligninger for nærliggende ligevægtstilstande	45
4.2.3 Ligevægtsligninger for nærliggende ligevægtstilstande	47
5 Randbetingelser for nærliggende ligevægtstilstande	49
5.1 Randkraft	49
5.2 Randmoment	52
5.3 Randbetingelser.....	59

6	Konstitutive ligninger	61
6.1	Konstitutive ligninger i lineær skalteori.....	61
6.1.1	Pladevirkning	61
6.1.2	Skivevirkning.....	63
6.2	Konstitutive ligninger i stabilitetsteori for skalkonstruktioner.....	65
7	Stabilitetsteori - Energimetoden	67
7.1	Stabilitetskriteriet.....	67
7.1.1	Virtuelle arbejdes princip.....	67
7.1.2	Stabilitet	69
7.2	Bestemmelse af kritisk belastning vha. stabilitetskriteriet.....	72
8	Tilnærmet ikke-lineær teori, imperfekte skaller	75
8.1	Tilnærmet ikke-lineær teori	75
8.2	Imperfektioner	76
 DEL 2 AKSIALT BELASTET CIRKULÆR CYLINDERSKAL		
9	Introduktion	79
9.1.1	Metrik	82
9.1.2	Fysiske komponenter.....	83
9.1.3	Deformationer og konstitutive ligninger.....	84
9.1.4	Ligevægtsligninger	86
9.2	Ligevægtsligninger for nærliggende ligevægtstilstande.....	86
9.2.1	Ligevægtsligninger i lineær stabilitetsteori	86
9.2.2	Ligevægtsligninger i ikke-lineær stabilitetsteori	87
9.3	Randbetingelser.....	88
9.3.1	Randbetingelser i lineær stabilitetsteori	91
9.3.2	Randbetingelser i ikke-lineær stabilitetsteori	91
10	Differensmetoden	93
10.1	Diskretisering	94
10.2	Lineær teori.....	97
10.3	Ikke-lineær teori	103
10.3.1	Imperfektioner	105
11	Lineærelastisk foldningsanalyse uden imperfektioner – klassisk kritisk last.....	107
11.1.1	Diskretisering	110
11.1.2	Resultat	113
12	Ikke-lineære løsninger for imperfekte skaller	119
12.1	Aksesymmetrisk imperfektion med bølger i skallens længderetning	122

12.1.1	Diskretisering og tolerance	123
12.1.2	Resultat.....	124
12.2	Kvadratisk bølgeimperfektion	129
12.2.1	Diskretisering og tolerance	130
12.2.2	Resultat.....	131
13	Konklusion	137
14	Citerede værker	141

Symbolliste

Tensor notation

Latinske indices i, j, k, \dots tillægges værdierne 1, 2 og 3

Græske indices $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ tillægges værdierne 1 og 2

() Indices som er sat i parentes skal ikke summeres

, Komma mellem indices betyder kovariant differentiation

Fed font betegner vektor

Foran symboler betegner

δ en variation/tilvækst

Δ en egentlig tilvækst

Små latinske bogstaver

a	Determinanten $ a_{\alpha\beta} $
\mathbf{a}_3	Enhedsvektor i fladenormalens retning
\mathbf{a}_α	Kovariante basisvektorer
\mathbf{a}^α	Kontravariante basisvektorer
$a_{\alpha\beta}$	Kovariante metriske tensor
$a^{\alpha\beta}$	kontravariante metriske tensor
$b_{\alpha\beta}$	Krumningstensor
ds	Længden af stedvektorens tilvækst
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ og \mathbf{e}_3	Enhedsvektorer langs hhv. x_1 -, x_2 - og x_3 -aksen.
$e_{\alpha\beta}$	Permutationstensor
\mathbf{f}	Kraften pr. volumenenhed
h	Skaltykkelsen
\mathbf{h}	Enhedstangentvektoren til en vilkårlig kurve i fladen
h_α	Komponenter af \mathbf{h}
$k_{\alpha\beta}$	Bøjningstensor
l, l_1 og l_2	Sidelængderne i en infinitesimal trekant
\mathbf{n}	Udadrettet enhedsvektor, normal til randen
n_α	Komponenter af \mathbf{n}
\mathbf{p}	Kraft pr. arealenhed
s	Buelængde
t	Tid
\mathbf{t}	Vektor i tangentplanen vinkelret på enhedstangentvektoren \mathbf{n} eller \mathbf{h}

t_α	Komponenter af \mathbf{t}
u, v, w	Flytninger
\mathbf{u}	Flytningsvektor
u^1, u^2	Krumlinede fladekoordinater
\mathbf{w}	Flytningsvektor, vilkårlig formfunktion
x_1, x_2, x_3	Kartesisk koordinater
x, y	Krumlinede fladekoordinater for en cirkulær cylinder
\angle_{12}	Vinkelen mellem basisvektorerne

Store latinske bogstaver

A	Arbejdet fra ekstra ydre kræfter
A_i	Indre virtuelle arbejde
A_y	Ydre kræfters virtuelle arbejde
E	Elasticitetskoefficienten
E_{ij}	Lagranges tøjningstensor
$F^{\alpha\beta}$	Asymmetrisk del af $N^{\alpha\beta}$
F	Areal
H	Summen af normalkrumningerne
\mathbf{M}_α	Momentvektor pr. længdeenhed i et referencesnit
$M^{\alpha\beta}$	Momenttensor
\mathbf{N}_α	Normalkraftvektor pr. længdeenhed
N^α	Normalkraft
$N^{\alpha\beta}$	Normalkrafttensor
P	Last
\mathbf{Q}_α	Forskydningskraftvektor pr. længdeenhed
Q	Forskydningskraft
Q^α	Forskydningskrafttensor
$\frac{1}{R}$	Normalkrumningen af en vilkårlig kurve i fladen
$\frac{1}{R_n}$	Normalkrumningen i n -retningen i et n, t -system langs randen
$\frac{1}{R_{nt}}$	Torsion i et n, t -system langs randen
$\frac{1}{R_t}$	Normalkrumningen i t -retningen i et n, t -system langs randen
$S^{\alpha\beta}$	Symmetrisk del af $N^{\alpha\beta}$

T^{ij}	Den anden Piola-Kirchhoff spændingstensor
$\frac{1}{T}$	Torsionen af en vilkårlig kurve i fladen
V	Volumen
W	Arbejdet langs randen

Små græske bogstaver

$[\alpha \beta, \gamma]$	Christoffel-symbolet af 1. art
$\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\}$	Christoffel-symbolet af 2. art
δ_{α}^{β}	Kroneckers symbol
$\delta A_{()}$	Komposant indført ifm. opstilling af arbejdet langs randen
$\delta B^{\alpha\beta}$	Indførte størrelser ifm. randmomenter
$\delta C^{\alpha\beta}$	Indførte størrelser ifm. randkræfter
$\delta D_{()}$	Komposanter indført ifm. opstilling af arbejdet langs randen
$\delta I_{\alpha\lambda}^{\circ}, \delta I_{\circ\lambda}^{\alpha}, \delta I_{\circ\lambda,\gamma}^{\alpha}$	Indførte størrelser $\delta I_{\alpha\lambda}^{\circ} = \delta v_{\alpha,\lambda} - b_{\lambda\alpha} \delta w$, $\delta I_{\circ\lambda}^{\alpha} = \delta v_{,\lambda}^{\alpha} - b_{\lambda}^{\alpha} \delta w$ og $\delta I_{\circ\lambda,\gamma}^{\alpha} = \delta v_{,\lambda\gamma}^{\alpha} - (b_{\lambda}^{\alpha} \delta w)_{,\gamma}$
δV^{α}	Indførte størrelser ifm. randkræfter
$\delta \theta_{\alpha}$	Rotationen af fladenormalen
$\delta \Phi$	Rotationsvektor
$\delta \omega_{\alpha\beta}$	Skalmidterfladens asymmetriske rotationstensor, rotationen i tangentplanen omkring fladenormalen
$\delta \Omega$	Rotationsvektoren af normalen \mathbf{a}_3
$\delta \Omega_3$	Rotationskomponent, til bestemmelse af rotationen omkring normalen
ε	Længdetøjning
$\varepsilon_{\alpha\beta}$	Skalmidterfladens tøjningstensor
$\kappa_{\alpha\beta}$	Symmetrisk del af $k_{\alpha\beta}$
η	Belastningsparameter
$\frac{1}{\rho_1}$ og $\frac{1}{\rho_2}$	Hovedkrumninger i en plade
σ	Normalspænding (positiv som trækspænding)
$\sigma^{\alpha\beta}$	Spændingstensor

Sænket skrift

0	Henviser til referencetilstanden
cr	Kritisk værdi
cl	Klassisk kritisk værdi
imp	Flytning fra imperfektion
til	Flytninger udover imperfektionen
x, y	Koordinater for cirkulær cylinder

Ekstra

*	Benyttes for transformerede størrelser
~	Benyttes for påførte kræfter

Ekstra symboler ifm. del 2

{ }	Benyttes ved vektorer
[]	Benyttes ved matricer
$[A_l]$	Lineær koefficientmatrix
$[A_{l, RB}]$	Matrix indeholdende den lineære koefficientmatrix og de lineære randbetingelser
$[A_{nl, RB}]$	Matrix indeholdende den ikke-lineære koefficientmatrix og de ikke-lineære randbetingelser
$[dx1], [dy1], \dots$	Differensoperatorer
D_a	Stivhedsbetegnelse for aksialstivhed
D_b	Stivhedsbetegnelse for bøjningsstivhed
L	Længde
m, n	Netpunkter i omkreds- og længderetningen
m_w	Antallet af bølger i omkredsretningen
n_w	Antallet af halvbølger i længderetningen
O	Omkreds
R	Radius
$[RB_l]$	Matrix for lineære randbetingelser
$[RB_{nl}]$	Matrix for ikke-lineære randbetingelser
w_{sum}	Summen af w -flytninger i alle netpunkter
α	Dimensionsløs imperfektionsamplitude
λ	Halvbølgelængde

ζ	Relaksationsfaktor
ψ	Fejl-mål

Sænket skrift

b, t	Betegnelser for bunden og toppen af en cirkulær cylinder
i	Iterationsnummer
O, N, S, E, W	Lokal betegnelser for netpunkter

1 Indledning

Før stabilitetsteorien for skaller opstilles i afhandlingens Del 1 og anvendes i Del 2 gives der her en kort introduktion til skalteorien. Pga. skallitteraturens enorme omfang, af flere beskrevet som det mest studerede emne inden for bærende konstruktioner, vil kun de vigtigste bidrag til udviklingen blive omtalt.

Dette afsnit er delt op i tre hovedemner, for hvert af de tre emner gives en historisk oversigt. Således beskrives først, i afsnit 1.2, teorier for små flytninger og små flytningsgradienter, de såkaldte lineære teorier. I afsnit 1.3 introduceres stabilitetsteorien for skalkonstruktioner og den såkaldte lineære stabilitetsteori forklares. I afsnit 1.4 omtales de geometriske ikke-lineære teorier og disses betydning for imperfekte skalkonstruktioner dvs. skalkonstruktioner hvis geometriske form afviger svagt fra den tilsigtede og veldefinerede form.

Først beskrives dog hvad der forstås ved en skalkonstruktion.

1.1 Definition af en skalkonstruktion

En skalkonstruktion kan bedst beskrives ud fra en geometrisk flade i rummet. Denne flades beliggenhed kan beskrives ved en stedvektor, \mathbf{r} , rettet fra begyndelsespunktet i et globalt kartesisk x_1, x_2, x_3 -koordinatsystem til et vilkårligt punkt. Stedvektoren er en funktion af to krumlinede fladekoordinater u^1 og u^2 og kan på vektorform skrives

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2) \quad (1.1)$$

De krumlinede koordinater kan vælges frit, dog med den betingelse at et koordinatpar (u^1, u^2) entydigt fastlægger et punkt på fladen.

En skalkonstruktion fremkommer, hvis der på begge sider af fladen tilføjes et materiale med tykkelsen $h/2$, målt langs fladenormalen. Størrelsen h betegner skaltykkelsen og den definerede flade bliver dermed til skallens midterflade. Haves en skalkonstruktion, hvor tykkelsen er meget mindre end de andre dimensioner af skallen, betegnes skallen som en tynd skal.

En skalteori er en teori for en deformation af en skal, hvilket betyder, at stedvektoren \mathbf{r} er en funktion af en parameter, fx tiden. Deformationen skyldes ydre kræfter, hvor egenvægten ofte spiller en betydelig rolle. Kræfter, der er uafhængige af tiden, betegnes en statisk belastning eller en dødvægtsbelastning. Ved en sådan belastning er det kun nødvendigt at skelne mellem forholdene i to tilstande; den udeformerede tilstand og den deformerede tilstand. Forskellen mellem stedvektoren for de to tilstande kaldes flytningen.

En deformation fremkalder tøjninger, som både er længdeændringer og vinkelændringer. Tøjningerne giver anledning til spændinger og sammenhængen mellem tøjninger og spændinger beskrives vha. de konstitutive ligninger. Er der en lineær sammenhæng mellem spændinger og tøjninger, er materialet lineærelastisk.

Et vigtigt element i en skalteori er beskrivelsen af spændingstilstanden. Ofte arbejdes der dog ikke med spændinger men med deres statiske ækvivalens – snitkræfterne.

Deformationer kan også fremkomme ved en dynamisk belastning, fx et stød. Herved fremkaldes svingninger, og stedvektoren bliver en funktion af tiden.

Teoriens basis er naturligvis Newtons love og en teori eller en antagelse om materialets konstitutive ligninger.

Om den historiske udvikling af den klassiske mekanik henvises til to korte gennemgange af Timoshenko (Timoshenko, 1953) og Nielsen og Harder (Nielsen & Harder, 2004).

1.2 Lineære teorier

I de klassiske teorier for forskellige konstruktionselementer som bjælker, søjler, skiver, plader, skaller (en plade er en skalkonstruktion hvor midterfladen er plan) og massiver er det hensigtsmæssigt at dele teorierne op i tre elementer:

- 1) Statiske eller dynamiske betingelser (Newtons love).
- 2) Geometriske betingelser, der beskriver sammenhængen mellem flytninger og tøjninger.
- 3) Konstitutive ligninger, der beskriver sammenhængen mellem tøjninger og spændinger.

Betragtes en statisk belastning hvor spændingstilstanden er beskrevet vha. snitkræfterne, kan de tre elementer i teorien oversættes til:

- 1) Ligevægtsbetingelsen mellem snitkræfter og ydrekræfter.
- 2) Sammenhængen mellem flytninger og de deformationsmål der benyttes til at beskrive deformation.
- 3) Sammenhængen mellem snitkræfter og deformationsmål.

Med en sådan skalteori kan alle størrelser, der indgår, beskrives som funktion af fladekoordinaterne u^1 og u^2 , og den betegnes derfor som en todimensional teori. Tilsvarende haves en éndimensional teori for bjælker og søjler.

Det er værd at bemærke, at elementerne 1) og 2) er uafhængige af de konstitutive ligninger.

I de klassiske teorier har de teorier, hvor små flytninger og små flytningsgradienter forudsættes en stor rolle. Er de konstitutive ligninger lineære og opstilles ligevægtsligninger uden hensyntagen til flytningerne, fås en lineær teori. For en lineær teori gælder superpositionsloven, hvilket naturligvis er af stor betydning.

Forudsætningen vedr. flytningerne og flytningsgradienterne i lineære plade- og skalteorier fører til, at de kun gælder, når flytningerne i normalens retning er små ift. tykkelsen.

1.2.1 Udviklingen

For at beskrive den klassiske skalteoris udvikling er det naturligt at begynde med udviklingen af den klassiske pladeteori. De første forsøg på at opstille en sådan teori blev gjort af Euler og J. Bernoulli. Yderlige fremskridt blev gjort, da det franske akademi for videnskab udskrev en konkurrence, hvor opgaven bestod i at forklare Chladni's forsøg med sand på vibrerende metalplader. Den eneste som besvarede opgaven var Sophie Germain, der i efteråret 1811 indleverede sin besvarelse. Hun havde løst opgaven ved en energibetragtning, hvor hun antog, at pladens elastiske energi kunne bestemmes ved at integrere funktionen $(1/\rho_1 + 1/\rho_2)^2$ over pladen. Her er $1/\rho_1$ og $1/\rho_2$ hovedkrumningerne i den udbøjede plade. Funktionen blev minimeret vha. variationsregning, men der var imidlertid fejl i udregningen af den første variation. Lagrange, som var en del af bedømmelsesudvalget, fandt fejlen, og Germain fik derfor ikke prisen. Vha. det virtuelle arbejdes princip lykkedes det Lagrange at finde formen af den korrekte differentiaalligning for Chladni-svingningerne dog med en ukendt konstant faktor.

Prisopgaven blev udskrevet to gange til, begge gange blev den kun besvaret af Germain. Til trods for at man stadig ikke var tilfreds med besvarelsen, fik hun prisen i 1816.

I 1814 viste Poisson, som også var en del af bedømmelsesudvalget, at den ligning Lagrange havde fundet også ville fremkomme ved minimering af et integral af et udtryk af formen $A(1/\rho_1 + 1/\rho_2)^2 + B(1/\rho_1^2 + 1/\rho_2^2)$, hvor A og B er konstanter. Med passende værdier af A og B stemmer udtrykket med det udtryk der i dag benyttes til bestemmelse af pladens tøjningsenergi. Poisson angav også et udtryk for konstanterne A og B , men de var ikke korrekte, idet han opfattede pladen som bestående af partikler udelukkende placeret i pladens midterplan.

Den korrekte differentiaalligning blev opstillet af Navier i 1820. I modsætning til Poisson antog han, at partiklerne var fordelt over hele pladens tykkelse. Konstanterne var dog stadig ikke helt korrekte, da partikelteorien kun giver én elastisk konstant for et elastisk materiale i stedet for to.

En korrekt todimensional pladeteori blev først fremstillet i 1850 af Kirchhoff (Kirchhoff, 1850). Han formulerede det, der i dag ofte kaldes Kirchhoff-Love forudsætningerne for plade- og skive-teorier. Forudsætningerne er at:

- 1) Midterfladens normal vil også være en normal til den udbøjede midterflade.
- 2) Tøjningerne i midterfladen er nul, hvis belastningen er vinkelret på midterfladen (tværbelastning).

Den første forudsætning er analog til Euler-Bernoullis bjælketeori fra omkring 1750. Forudsætningen kaldes normalt for forudsætningen om at plane tværsnit forbliver plane.

I Kirchhoffs afhandling (Kirchhoff, 1850) udledte han den lineære pladeteori, vi benytter i dag. I afhandlingen afklarede han samtidigt randbetingelserne. Vha. to forudsætninger beregnede Kirchhoff pladens potentielle energi udtrykt ved flytningerne. Dermed kunne han beregne den første variation af den potentielle energi, som kræves lig med nul for at få ligevægt. Herved kunne han udlede såvel pladens differentiaalligning som randbetingelserne. Metoden førte til, at der på en fri rand kun er to randbetingelser, mens andre bl.a. Poisson var kommet frem til tre randbetingelser. Umiddelbart er det også at forvente, at der på en fri rand skal være tre randbetingelser, idet det vil være naturligt at kræve, det bøjende moment, det vridende moment og kræfterne er nul.

Kirchhoff kunne dog vise, at hans randbetingelser førte til en entydig løsning. Han benyttede, at den elastiske energi er en positiv definit funktion af de anden afledede af flytningerne altså krumninger og torsion. Mere herom senere. Når der er en entydig løsning med kun to randbetingelser, vil det ikke være muligt at få tre betingelser opfyldt undtagen i specialtilfælde.

Kirchhoffs bevis var ren matematik. Først senere viste Kelvin og Tait (Lord Kelvin & Tait, 1888), at en reduktion af randbetingelserne havde en simpel statisk forklaring. Det kan nemlig vises, at det vridende moment pr. længdeenhed langs en rand er statisk ækvivalent med en forskydningskraft pr. længdeenhed plus evt. nogle enkeltkræfter fx i hjørner. Den ene af Kirchhoffs randbetingelser kunne dermed forklares ved, at de vridende momenter er omsat til statisk ækvivalente forskydningskræfter. Det kan altså ikke forlanges, at et påført vridende moment og en påført forskydningskraft på en rand er i fuld overensstemmelse med de indre kræfter, der kan kun kræves overensstemmelse mellem deres statiske ækvivalens.

Af Saint-Venants princip følger det, at en ændring af vridende momenter til en statisk ækvivalent fordeling af forskydningskræfter kun ændrer spændingsfordelingen i en lille omegn, i størrelsesordenen pladetykkelsen, omkring randen.

Overførelsen af Kirchhoffs pladeteori til skalkonstruktioner blev beskrevet af Love i (Love, 1892-93). Mens Kirchhoff havde støttet sig kraftigt til den tredimensionale elasticitetsteori, er Loves udvikling næsten konsekvent todimensional. Han formulerer forudsætning 1) ovenfor som

Kirchhoff men tillader tøjninger i skallens midterflade. I stedet for 2) skriver han, at der ingen tøjninger er i normalens retning.

Med Loves arbejde er skalteoriens grundlag stort set blevet tilfredsstillende formuleret. Derfor vil der i det følgende blive fokuseret på nogle detaljer i teorien, som er blevet løst på mange forskellige måder med et utal af varianter af teorien til følge.

1.2.2 Lineær skalteori

Til at få et overblik over mulighederne og rammerne for formulering af lineære teorier kan et sæt krav opstilles. Fra M. P. Nielsen (Nielsen, 1964), hvor en række krav til konsistente teorier omtales, citeres der

- 1) Teorien skal gøre det muligt at definere et virtuelt arbejdes princip.
- 2) Teoriens deformationsmål skal være nul ved stiv bevægelse og skal gøre det muligt ud fra givne deformationsmål entydigt at bestemme flytningerne bortset fra en stiv bevægelse.
- 3) Kendte naturlove fx Newtons love skal kunne tilfredsstilles.

I det følgende vil det blive beskrevet, hvordan ovenstående krav kan opfyldes.

En skalkonstruktions form er under Love-Kirchhoffs forudsætninger bestemt af to tensorer $a_{\alpha\beta}$ og $b_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$. Tensoren $a_{\alpha\beta}$ er den metriske tensor der bestemmer midterfladens såkaldte metrik. Tensoren $b_{\alpha\beta}$ bestemmer krumningsforholdene. Deformationsmålene skal altså ud fra $a_{\alpha\beta}$ og $b_{\alpha\beta}$ være af en sådan art, at den deformerede skal kan bestemmes entydigt. I en lineær teori vil det derfor i første omgang være naturligt at vælge den første variation af $a_{\alpha\beta}$ og $b_{\alpha\beta}$ hhv. $\delta a_{\alpha\beta}$ og $\delta b_{\alpha\beta}$, som mål for længdeændringerne og bøjningen. Dette svarer til en variation $\delta \mathbf{r}$ af stedvektoren til midterfladens punkter, som herved bliver midterfladens flytninger.

Herved bliver deformationsmålet for længdeændringerne i skalmidterfladen defineret ved

$$\delta \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \delta a_{\alpha\beta} \quad (1.2)$$

Mht. til et mål for bøjningen er der to grunde til ikke at vælge $\delta b_{\alpha\beta}$. Den første grund er, at hvis $\delta b_{\alpha\beta}$ vælges må der indføres en unaturlig modifikation af tensoren $N^{\alpha\beta}$, som bestemmer kræfterne i midterfladens tangentplan. Se fx (Budiansky & Sanders, 1962). Den anden grund er, at i specialtilfældet, hvor der haves en pladestrimmel, bliver bøjningsmålene ikke identiske med dem der anvendes i bjælketeorien. I bjælketeorien er bøjningsmålet, som kaldes krumningen, lig med tilvæksten i et normalsnits vinkeldrejning pr. længdeenhed, dvs. bøjningsmålet er uafhængigt af en eventuel samtidig længdeændring af bjælken. Det er derfor naturligt at finde et

bøjningsmål, som er mest muligt uafhængigt af skalmidterfladens længdeændringer. Et sådan bøjningsmål er tensoren $\delta k_{\alpha\beta}$, der er defineret ved

$$\delta k_{\alpha\beta} = \delta\theta_{\beta,\alpha} - b_{\alpha}^{\gamma}\delta\omega_{\beta\gamma} \quad (1.3)$$

Her er vektoren $\delta\theta_{\beta}$ rotationen af fladenormalen og tensoren $\delta\omega_{\beta\gamma}$ betegner rotationen i tangentplanen omkring fladenormalen. Kommaet betyder kovariant differentiation.

Deformationerne i skalmidterfladen er bestemt af de afledede af flytningerne hvilket $\delta\omega_{\beta\gamma}$ også er. Det er altså ikke lykkedes helt at fjerne alle afledede af flytningerne i bøjningsmålene.

Det kan vises at den symmetriske del af $\delta k_{\alpha\beta}$ sammen med $\delta a_{\alpha\beta}$ bestemmer $\delta b_{\alpha\beta}$.

De herved definerede deformationsmål $\delta a_{\alpha\beta}$ og $\delta k_{\alpha\beta}$ tilfredsstiller krav 2) opstillet ovenfor eftersom $\delta a_{\alpha\beta}$ og $\delta b_{\alpha\beta}$ forsvinder ved en stiftlegeme bevægelse. Det bemærkes at deformationsmålene i Loves lineære skalteori ikke tilfredsstiller dette krav.

Skallens snitkræfter i et vilkårligt normalsnit, dvs. et snit hvor midterfladens normal ligger, er bestemt af tre tensorer $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$ og Q_{α} . Tensoren $N^{\alpha\beta}$ bestemmer, som nævnt, kræfterne i midterfladens tangentplan, $M^{\alpha\beta}$ bestemmer momenterne og Q_{α} bestemmer forskydningskræfterne i normalens retning.

Det kan nu vises at det indre virtuelle arbejde pr. arealenhed af skalmidterfladen kan defineres ved følgende integral, som er taget over hele midterfladens areal F

$$A_i = \int_F (N^{\alpha\beta} \delta\varepsilon_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} \delta k_{\alpha\beta}) dF \quad (1.4)$$

Når ligevægtsbetingelserne er opfyldt er betingelsen $A_i = A_y$, hvor A_y er de ydre kræfters arbejde, eksakt opfyldt, se (Nielsen, 2004). Kravet 1) ovenfor er altså opfyldt.

I en dobbeltkrum skalkonstruktion vil normalsnittets udseende variere fra snit til snit. Selvom den tredimensionale spændingstensor i skallen er symmetrisk, vil den statiske ækvivalens heraf ikke nødvendigvis give to symmetriske tensorer $N^{\alpha\beta}$ og $M^{\alpha\beta}$. For tynde skaller vil det dog ofte være tilstrækkeligt at benytte de konstitutive ligninger, der gælder for lineærelastiske skiver og plader. At anvende disse konstitutive ligninger blev allerede foreslået af Love. Dette medfører at både $N^{\alpha\beta}$ og $M^{\alpha\beta}$ vil blive symmetriske. Dette er et problem, da momentligningen om normalen dermed ikke generelt kan tilfredsstilles. Krav 3) vil derfor ikke være opfyldt.

Den simpleste løsning på problemet således krav 3) opfyldes, er at regne $M^{\alpha\beta}$ symmetrisk og $N^{\alpha\beta}$ asymmetrisk, men kun lade den symmetriske del $S^{\alpha\beta}$ af $N^{\alpha\beta}$ indgå i de konstitutive ligninger. Den asymmetriske del $F^{\alpha\beta}$ vil dermed alene være bestemt af ligevægtsligningerne.

Skalteorien, som fremkommer efter den ovenfor beskrevne metode bliver identisk med Sanders teori (Sanders, 1959). Han kom frem til sin teori på en helt anden måde, idet han bl.a. bestemte deformationsmålene vha. det virtuelle arbejdes princip og ved at anvende de eksakte ligevægtsligninger på todimensional form.

Koiter (Koiter, 1960) kommer også til denne teori. Han starter med at betragte den tredimensionale teoris formler for tøjninger som funktion af flytninger, som er en funktion af en koordinat x^3 målt langs normalen til skalmidterfladen. Han sætter tværtøjningerne til nul og ser bort fra led af typen ε/R , hvor ε er længdetøjningen i midterfladen, og R er et af skalmidterfladens krumningsmål, idet han viser, at led af denne størrelsesorden er ubetydelige i teorier, hvor Loves lineære konstitutive ligninger benyttes. Derefter viser han vha. det virtuelle arbejdes princip at Loves tøjningsenergi giver de eksakte todimensionale ligevægtsligninger for skaller. Desuden viser han, at nogle skalteorier har bøjningsmål, der afviger fra den udviklede teori med størrelser, der ikke er af ordenen ε/R og som Koiter derfor formoder kan give større fejl. Her nævner han teorier foreslået af Knowles og Reissner (Knowles & Reissner, 1957) og Green og Zerna (Green & Zerna, 1954).

Det er bredt accepteret, at med Koiters og Sanders arbejde er formuleringen af en lineær skalteori afklaret. Deres formuleringer forklarer også, hvorfor der findes så mange brugbare varianter af lineære skalteorier.

Skalteorier baseret på Love-Kirchhoffs forudsætninger kan betragtes som et specialtilfælde af en mere generel teori, teorien for de såkaldte orienterede legemer. I disse knyttes til hvert punkt et sæt vektorer, normalt tre. Ved en deformation antages disse vektorer at blive overført til et nyt sæt vektorer (som også kan undergå længdeændringer).

Teorien for orienterede legemer blev foreslået af brødrene Cosserat (Cosserat & Cosserat, 1909) se også (Bræstrup, 1970). Her var kun én ekstra vektor (rotationsvektor).

Teorier der ofte citeres, og som kun afviger ubetydeligt fra den her benyttede teori, er bl.a. Flügge (Flügge, 1960), Goldenveizer (Goldenveizer, 1961) og Novozhilov (Novozhilov, 1959).

1.3 Stabilitetsteori

I det følgende introduceres stabilitetsteorien ved en kort beskrivelse af den generelle tredimensionale teori. Denne kan let overføres til både én- og todimensionale systemer.

En stabil ligevægtstilstand defineres ved, at hvis der tilføjes yderligere ydre kræfter til de allerede givne ydre kræfter på en konstruktion, skal disse ekstra ydre kræfter udføre et positivt arbejde A for at fremkalde en ændring af ligevægtstilstanden til en nærliggende ligevægtstilstand.

Betragt en sådan deformation hvor alle størrelser som indgår, er funktioner af én parameter fx tiden t . Bidrag fra accelerationer er her ikke medtaget. I den generelle tredimensionale teori er det indre arbejde pr. oprindelig volumenenhed i et tidsselement dt lig med $T^{ij}(\partial E_{ij}/\partial t)dt$. Her er T^{ij} den anden Piola-Kirchhoff spændingstensor og E_{ij} er Lagranges tøjningstensor. i og j løber fra 1 til 3. Volumenkræfternes arbejde i et tidsselement dt er $\mathbf{f}_0 \cdot (\partial \mathbf{u}/\partial t)dt$, hvor \mathbf{f}_0 er kraften pr. oprindelig volumenenhed og \mathbf{u} er flytningsvektoren. På randen udføres et tilsvarende arbejde $\mathbf{p}_0 \cdot (\partial \mathbf{u}/\partial t)dt$ hvor \mathbf{p}_0 er randkraften pr. oprindelig arealenhed.

Arbejdet A fra ekstra ydre kræfter er i et tidsinterval fra t_0 til t

$$A = \int_{t_0}^t \left(\int_{V_0} T^{ij} \frac{\partial E_{ij}}{\partial \tau} dV_0 \right) d\tau - \int_{t_0}^t \left(\int_{V_0} \mathbf{f}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} dV_0 \right) d\tau - \int_{t_0}^t \left(\int_{F_0} \mathbf{p}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} dF_0 \right) d\tau \quad (1.5)$$

Det integreres over det oprindelige volumen V_0 og langs den oprindelige rand F_0 . τ er en integrationsparameter, der erstatter t . Det er forudsat, at \mathbf{f}_0 og \mathbf{p}_0 er uafhængige af t .

En stabil ligevægtsstilling er, ud fra definitionen, en stilling hvor $A > 0$ for enhver geometrisk mulig flytning $\mathbf{u}(t)$ i et lille område omkring ligevægtsstillingen. Det ses, at størrelsen A er tilvæksten i den potentielle energi idet \mathbf{f}_0 og \mathbf{p}_0 er konstante, og der dermed udgør et konservativt system.

Flytningen \mathbf{u} antages at være følgende simple funktion af t

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + (t - t_0)\mathbf{w} \quad (1.6)$$

Her er \mathbf{u}_0 flytningen til tiden t_0 altså startflytningen. Flytningen \mathbf{w} angiver en vilkårlig formfunktion og er uafhængig af t .

I variationsregningen foretages tilsvarende undersøgelser for at finde ekstrema af integraler, der er funktioner af en funktion, såkaldte funktionaler. I variationsregning er $(t - t_0)\mathbf{w}$ kun en såkaldt svag variation. Selvom \mathbf{w} er vilkårlig, kan det vises, at kriteriet $A > 0$ strengt taget ikke er nok for en vilkårlig flytning. I praksis har dette problem dog ingen betydning.

Indsættes (1.6) i (1.5) bliver A en funktion af t når \mathbf{w} fastholdes. Der fås

$$\frac{dA}{dt} = \int_{V_0} T^{ij} \frac{\partial E_{ij}}{\partial t} dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{f}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV_0 - \int_{F_0} \mathbf{p}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dF_0 \quad (1.7)$$

Det ses at højresiden er et udtryk for det virtuelle arbejdes princip, som i ligevægstilstanden ved tiden $t = t_0$, er lig med nul. Dermed er $dA/dt = 0$ for $t = t_0$.

Differentieres der en gang til fås

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = \int_{V_0} \left(\frac{\partial T^{ij}}{\partial t} \frac{\partial E_{ij}}{\partial t} + T^{ij} \frac{\partial^2 E_{ij}}{\partial t^2} \right) dV_0 \quad (1.8)$$

idet det blev forudsat, at \mathbf{f}_0 og \mathbf{p}_0 er uafhængige af den stilling legemet indtager.

Stabilitetskriteriet ang. positivt arbejde fra ekstra ydre kræfter, $A > 0$, er opfyldt hvis følgende to betingelser er opfyldte

$$\begin{aligned} \frac{d^n A}{dt^n} &> 0 && \text{For } t = t_0 \text{ og for et vist lige } n \\ \frac{d^n A}{dt^n} &= 0 && \text{For } t = t_0 \text{ og for alle mindre } n \end{aligned} \quad (1.9)$$

I praksis er det sjældent nødvendigt at bestemme højere afledede end $d^2 A/dt^2$.

Hvis $d^2 A/dt^2 \neq 0$ er en nødvendig men også tilstrækkelig betingelse for stabilitet, at højresiden i (1.8) er større end nul for $t = t_0$ og for alle geometrisk mulige flytninger \mathbf{w} .

Stabilitetskriteriet bliver da

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = \int_{V_0} \left(\frac{\partial T^{ij}}{\partial t} \frac{\partial E_{ij}}{\partial t} + T^{ij} \frac{\partial^2 E_{ij}}{\partial t^2} \right) dV_0 > 0 \quad (1.10)$$

I variationsregningen foretages, som nævnt, tilsvarende undersøgelser. Indføres derfor nu betegnelserne fra variationsregning ved

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u} &= \frac{d\mathbf{u}}{dt} dt = \mathbf{w} dt \\ \delta A &= \frac{dA}{dt} dt \\ \delta^2 A &= \frac{d^2 A}{dt^2} dt^2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

der tages til tiden $t = t_0$ kan (1.7) dermed skrives

$$\delta A = \int_{V_0} T^{ij} \delta E_{ij} dV_0 - \int_{V_0} \mathbf{f}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dV_0 - \int_{F_0} \mathbf{p}_0 \cdot \delta \mathbf{u} dF_0 \quad (1.12)$$

som i ligevægtstilstanden er nul.

Stabilitetskriteriet (1.10) kan nu skrives

$$\delta^2 A = \int_{V_0} (\delta T^{ij} \delta E_{ij} + T^{ij} \delta^2 E_{ij}) dV_0 > 0 \quad (1.13)$$

En belastning som medfører at $\delta^2 A = 0$ kaldes en kritisk belastning. For denne belastning gælder det, at systemet kan deformeres i det små uden, at der skal udføres et arbejde. Tilstanden

hvor $\delta^2 A = 0$ har derfor stor praktisk betydning, da blot en lille ubetydelig ændring af belastningen vil gøre konstruktionen ustabil.

Ved en kritisk belastning vil et nyt eller flere nye deformationsmønstre ift. deformationerne op til den kritiske last ofte blive mulige. Er deformationsmønsteret op til den kritiske last også statisk muligt for større belastninger end den kritiske har deformationsmønsteret et såkaldt bifurkationsskæbepunkt. Deformationsmønsteret eller flytningsmønsteret ved en kritisk belastning kaldes typisk foldningsmønster eller foldning.

Når en konstruktion undersøges vha. energikriteriet (1.13) betegnes det som energimetoden.

For en belastning hvor $\delta^2 A = 0$ vil det gælde, at der også er ligevægt i en nabotilstand, hvis konstruktionen udsættes for en flytningstilstand svarende til den tilstand, som giver $\delta^2 A = 0$. Det kan vises, at den mindste belastning, der giver mulighed for ligevægt i en nabotilstand, er lig med den belastning, der giver $\delta^2 A = 0$. Denne metode til at bestemme stabilitet betegnes ligevægtsmetoden.

I praksis erstattes Piola-Kirchhoffs spændingstensor T^{ij} i (1.13) ofte med spændingstensoren σ^{ij} som anvendes i den lineære teori. Ligeledes erstattes Lagranges tøjningstensor E_{ij} med den sædvanlige lineære teoris tøjningstensor ε_{ij} . Dermed bliver $\delta\sigma^{ij}\delta\varepsilon_{ij}$ til tilvæksten af den dobbelte elastiske energi. Stabilitetskriteriet i (1.13) kan da skrives

$$\delta^2 A = \int_{V_0} (\delta\sigma^{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \sigma^{ij}\delta^2\varepsilon_{ij})dV_0 > 0 \quad (1.14)$$

Bestemmelse af den kritiske belastning kan i praksis ske ved at betragte en proportionalbelastning dvs. en belastning bestemt af én belastningsparameter η . Spændingsfordelingen bestemmes da for varierende η -værdier vha. den lineære teori, hvilket betyder at ligevægtsligningerne opstilles uden hensyntagen til flytningerne. Herefter kan kritiske værdier af belastningsparameteren der giver $\delta^2 A = 0$ bestemmes. Ofte vil der være flere løsninger, men i praksis vil det naturligvis normalt kun være den laveste, der har interesse. Denne vigtige variant af stabilitetsteorien betegnes den lineære stabilitetsteori.

En sådan analyse kan ikke bruges til at vurdere, hvordan konstruktionen opfører sig for større flytninger end de infinitesimale flytninger svarende til en variation $\delta\mathbf{u}$. Skal konstruktionens opførsel udover denne flytning undersøges skal højere ordens led medtages. Ændringen i arbejdet bliver da, idet $\delta A = 0$ ved ligevægt

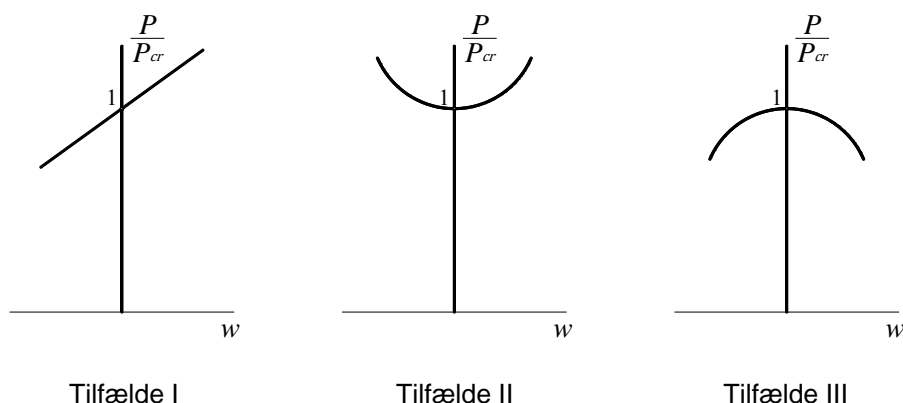
$$\Delta A = \frac{1}{2}\delta^2 A + \frac{1}{6}\delta^3 A + \frac{1}{24}\delta^4 A + \dots \quad (1.15)$$

For en kritisk belastning er, som nævnt, $\delta^2 A = 0$.

En ligevægtsløsning bestemmes under alle omstændigheder ved at kræve, at den potentielle energi er stationær. Ved at medtage flere led, som vist i (1.15), er det muligt vha. en ikke-lineær teori at få en indsigt i konstruktionens opførsel nær den kritiske belastning. Haves en konstruktion med kun én flytningsstørrelse w og én kraftstørrelse P vil forholdet P/P_{cr} , hvor P_{cr} er den kritiske last, være bestemt af et udtryk af formen

$$\frac{P}{P_{cr}} = 1 + a_1 w + a_2 w^2 + \dots \quad (1.16)$$

Her er a_1 og a_2 konstanter. Funktionen er afbildet i Figur 1.1. I tilfælde I er $a_2 = 0$, i tilfælde II er $a_1 = 0$ og $a_2 > 0$ og i tilfælde III er $a_1 = 0$ og $a_2 < 0$. Med en sådan undersøgelse kan følsomheden overfor geometriske imperfektioner vurderes. I tilfælde I og III vil konstruktionens bæreevne kunne være følsom overfor imperfektioner, idet bæreevnen bliver lavere end for den perfekte konstruktion. Dvs. at det er deformationsmønsteret efter bifurkation for den perfekte konstruktion som afgør om konstruktionen er følsom overfor imperfektioner.



Figur 1.1 – Opførsel i nærheden af en kritisk belastning

Stabilitetsteorien her beskrevet ud fra en generel tredimensional teori kan, som nævnt, let oversættes til én- og todimensionale teorier. Det er dog en forudsætning, at en komplet ikke-lineær teori haves til rådighed.

1.3.1 Udviklingen

Et af de første væsentlige bidrag kom fra Bryan (Bryan, 1891). Han udledte energiligningen til bestemmelse af kritiske belastninger for en skive.

Den kritiske belastning for en cirkulær cylindreskal belastet med et aksialt tryk blev første gang bestemt af den tyske ingeniør Lorenz (Lorenz, 1908). Han betragtede en imperfekt cirkulær cylinder under tryk. Lorenz bestemte et udtryk for den kritiske belastning ved, at en nævner i en brøk, til bestemmelse af deformationerne, blev uendelig stor ved et bestemt tryk. Senere, i (Lorenz, 1911), behandlede han foldning for en cirkulær cylinder med bølger i både længde- og

omkredsretningen. Dette i modsætning til hans første arbejde hvor han kun arbejdede med bølger i længderetningen.

Det i dag velkendte udtryk for den klassiske kritiske aksiale belastning af en tynd cirkulær cylinderskal uden imperfektioner tilskrives Timoshenko. Han fandt frem til følgende udtryk

$$\sigma_{cl} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{h}{R} \quad (1.17)$$

Her er σ_{cl} den klassiske kritiske værdi af den påførte normaltrykspænding, E er elasticitetskoeficienten, h er tykkelsen, og R er midterfladens radius.

Udtrykket i (1.17) gælder for cirkulære cylinderskaller, hvor tykkelsen er meget mindre end de andre dimensioner af skallen. Dvs. at cylinderskallen er så tilpas lang at den ved den kritiske last folder med flere bølger i længderetningen dog ikke længere end, at den begynder at opføre sig som en Eulersøjle.

Timoshenko skrev i 1910 i (Timoshenko, 1910) om en lang række stabilitetsproblemer (Eulersøjler, gitterstænger, rektangulære plader, kipning af bjælker og cirkulære cylinderskaller). Senere blev disse resultater samt mange andre samlet i et meget værdifuldt værk (Timoshenko, 1934).

Teorier for en kritisk belastning har været og er stadig af stor betydning, men det lå tidligt klart at disse teorier, specielt for aksialt belastede cylinderskaller, stemte dårligt overens med forsøg. Årsagen til den lave eksperimentelle belastning blev i begyndelsen forklaret med randforholdene. Det viste sig at være forkert. Bæreevnen af ikke alt for korte skaller har senere vist sig uafhængig af randforholdene, når blot randene er fastholdt mod flytninger i tangentretningen. Dette blev også bekræftet, da det lykkedes at nå den klassiske last ved forsøg med tilnærmelsesvis perfekte cylindere.

Derfor har mange arbejdet med dels at finde grunden til den stærkt nedsatte bæreevne og dels udvikle teorier til at bestemme den.

I dag er der bred enighed om, at den mest betydningsfulde årsag til forskellen mellem forsøg og teori er geometriske imperfektioner, men teorier for imperfekte skaller bæreevne er stadig under udvikling.

1.4 Ikke-lineære teorier

Det vil i princippet være simpelt at udvide teorier til at gælde for ikke-lineære konstitutive ligninger. I generelle ikke-lineære teorier forlades forudsætningen vedr. små flytninger og små flytningsgradier, hvilket gjorde det muligt i den lineære teori at opstille ligevægtsbetingelser i

den udeformerede tilstand uden at begå alvorlige fejl. I de simpleste ikke-lineære teorier bevarer dog forudsætningen om at skalnormalen, til den udeformerede tilstand, under en deformation forbliver ret og står vinkelret på den deformerede skalmidterflade.

En konsistent ikke-lineær teori bør tilfredsstille krav, der er analoge til kravene opstillet i afsnit 1.2.2 for lineære teorier.

De mest oplagte deformations mål er derfor nu

$$\Delta a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}^0 \quad (1.18)$$

$$\Delta b_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}^0 \quad (1.19)$$

Disse formler udtrykker forskellen mellem hhv. den metriske tensor $a_{\alpha\beta}$ og krumningstensen $b_{\alpha\beta}$ i den deformerede tilstand og de tilsvarende i den udeformerede tilstand, $a_{\alpha\beta}^0$ og $b_{\alpha\beta}^0$. I praksis arbejdes dog normalt med et deformationsmål givet ved

$$\Delta \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}^0) \quad (1.20)$$

Dette skyldes, at $a_{\alpha\beta}$ bestemmer kvadratet på buelængdedifferentialet ds . Definitionen i (1.20) vil da føre til den sædvanlige tøjningstensor i den lineære teori for tøjninger i skallens tangentplan. Der foretages ingen tilsvarende ændring vedr. $\Delta b_{\alpha\beta}$, dvs. deformationsmålet for krumningen $\Delta \kappa_{\alpha\beta}$ er

$$\Delta \kappa_{\alpha\beta} = -(b_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}^0) \quad (1.21)$$

Minustegnet er indført af hensyn til bekvemmelighed.

Deformationsmålene $\Delta \varepsilon_{\alpha\beta}$ og $\Delta \kappa_{\alpha\beta}$ har den ulempe, at det indre virtuelle arbejde pr. arealenhed af skallen ikke bliver $N^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta}$. Her er, som tidligere, $N^{\alpha\beta}$ normalkrafttensoren der bestemmer snitkræfterne i tangentplanen i et vilkårligt normalsnit, og $M^{\alpha\beta}$ er momenttensoren der bestemmer de bøjende og vridende momenter også i et vilkårligt normalsnit.

I den ikke-lineære teori foreslået af Sanders (Sanders, 1963), løses dette problem ved at indføre en modificeret normalkrafttensor $N_{\times}^{\alpha\beta}$ defineret ved

$$N_{\times}^{\alpha\beta} = N^{\alpha\beta} + b_{\lambda}^{\beta} M^{\lambda\alpha} \quad (1.22)$$

Det kan da vises, at momentligningen om skalnormalen kræver, at $N_{\times}^{\alpha\beta}$ er symmetrisk. Med denne modificerede normalkrafttensor bliver det indre virtuelle arbejde lig med

$$A_i = \int_F (N_{\times}^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta}) dF \quad (1.23)$$

Det ses, at uden minustegnet i (1.21) ville (1.23) have fået en uønskelig form.

Ligevægtsligninger og randbetingelser har naturligvis samme form i en vilkårlig deformeret tilstand som ligevægtsligningerne i den udeformerede tilstand. Basisvektorer mv. skal naturligvis svare til den betragtede tilstand.

De konstitutive ligninger vil normalt være en sammenhæng mellem $N_x^{\alpha\beta}$ og $M^{\alpha\beta}$ og deformationsmålene $\Delta\varepsilon_{\alpha\beta}$ og $\Delta\kappa_{\alpha\beta}$. Her kan i det simpleste tilfælde benyttes en lineær sammenhæng svarende til den lineære teori.

Selvom Sanders teori i princippet er simpel bliver ligningerne meget komplicerede. Derfor vil der i denne afhandling blive udviklet en simplere ikke-lineær teori.

Med en ikke-lineær teori til rådighed kan den potentielle energi opskrives og deformationsmuligheder i ligevægtstilstande kan bestemmes som forklaret i afsnit 1.3.

En meget benyttet tilnærmelsesteori er foreslået af Koiter (Koiter, 1945). Hans doktorafhandling var skrevet på hollandsk, og hans arbejde blev først kendt i den engelsktalende verden langt senere.

Koitors idé er i princippet meget simpel, men den har vist sig at være meget nyttig. Som en tilnærmelse foreslår han, at flytningstilstanden i et bifurkationspunkt kan regnes proportional med flytningstilstanden svarende til den klassiske kritiske belastning. Flytningstilstanden er dermed bestemt af én parameter, og der haves en situation som beskrevet i afsnit 1.3. For at den potentielle energi i nærheden af bifurkationspunktet kan beregnes som funktion af den nævnte parameter, kræves det naturligvis, at en fuldstændig eller tilnærmet ikke-lineær teori haves til rådighed. Dermed kan flytningstilstanden bestemmes.

Koiter behandlede også lineære kombinationer af klassiske foldningsmønstre og viste eksempler på, at sådanne kombinationer kan være farligere end de enkelte foldningsmønstre.

1.4.1 Udviklingen

En cirkulær aksialt belastet cylinderskal bærer sin last på tilsvarende vis som en søjle på et elastisk underlag, hvor cylinderes geometri med "ringe" skaber det elastiske underlag. I 1940 viste von Kármán, Dunn og Tsien (von Kármán, et al., 1940) at en svag ikke-linearitet i underlaget kan have en dramatisk effekt. Deres idé var altså, at det er "ringenes" ikke-lineære egenskaber, der forklarer den aksialt belastede cylinderskals opførsel herunder den reducerede bæreevne, den store spredning på forsøgsresultaterne og det pludselige brud.

En lang række af forfattere har benyttet en ikke-lineær tilnærmelsesteori for cirkulære cylindreskaller foreslået af Donnell (Donnell, 1934) eller varianter heraf. I denne teori ses der til at begynde med bort fra forskydningskræfter i normalens retning i et snit vinkelret på omkredsretningen. Herved kan snitkræfter i tangentplanen beskrives vha. Airys spændingsfunktion. Til at bestemme tøjningerne som funktion af flytningerne medtages kun følgende ikke-lineære led: $\frac{1}{2}(\partial w/\partial x)^2$, $\frac{1}{2}(\partial w/\partial y)^2$ og $(\partial w/\partial x)(\partial w/\partial y)$. Her er w flytningen i normalens retning, x -aksen ligger i længderetningen og y er buelængden i omkredsretningen. I formlerne for krumningerne medtages kun leddene fra den lineære teori. Mht. projektligningen i normalens retning antages det, at skallen er "flad", herved kan krumningernes bidrag bestemmes vha. de anden afledede af w mht. x og y .

Benyttes de konstitutive ligninger fra den lineære teori, nås der frem til, at spændingsfunktionen C og flytningerne w skal tilfredsstille følgende differentialligninger

$$\nabla^4 C = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (1.24)$$

$$\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \nabla^4 w + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \nabla^4 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (1.25)$$

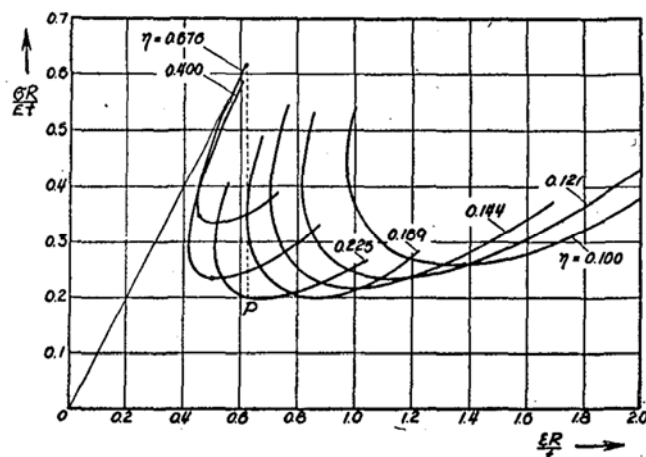
Her er nabla-operatoren

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.26)$$

I stedet for at løse disse ligninger kan Donnells teori benyttes til at beregne den potentielle energi. Energien udtrykkes vha. et antal parametre og den potentielle energi minimeres mht. til disse parametre. Denne metode blev benyttet af von Kármán og Tsien (von Kármán & Tsien, 1941).

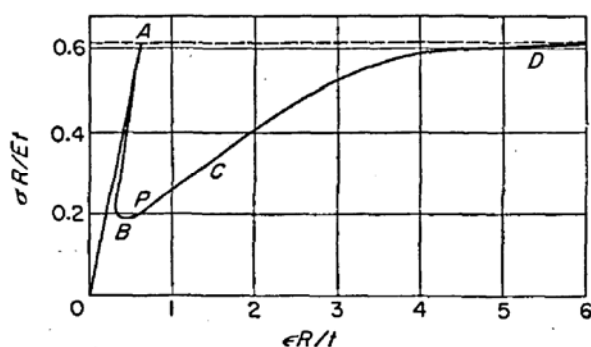
På grundlag af et tilnærmet udtryk for flytningen w i normalens retning, minimerede de den potentielle energi mht. til to parametre. I deres undersøgelse blev to forhold mellem antallet af bølger i omkredsretningen m og antallet af halvbølger i frembringerretningen n undersøgt nemlig $2n/m = 1$ og $2n/m = 0,5$. Ift. forsøg passede den første værdi bedst. Alle deres beregninger var for en perfekt skal.

I Figur 1.2 er et af deres resultater vist. Figuren viser ligevægtsløsninger for en cylinderskal med $R/h = 1000$. $\sigma R/Eh$ er afbilledet som funktion af $\varepsilon R/h$, hvor ε er den gennemsnitlige relative forkortelse i længderetningen, og parameteren η betyder her $m^2 h/R$.



Figur 1.2 – $\sigma R/Eh$ som funktion af $\varepsilon R/h$ for $n/m = 1$. Størrelsen $\eta = m^2 h/R$ bestemmer antallet af bølger i omkredsretningen

Resultaterne var på den tid enestående. De viste, at der for en perfekt skal er ligevægtsløsninger, som ligger meget tæt ved den lineære arbejdslinje op til den klassiske løsning. Det bemærkes, at nogle af løsningerne svarer til at skallens længde, efter forkortelse op til den kritiske last, vokser. Herved kan den lave last, målt ved forsøg, forklares. Når den klassiske bæreevne nås vil lasten ved et flytningsstyret forsøg pludseligt falde til et punkt P på en af ligevægtsløsningens kurver, som vist i Figur 1.2. Lasten i punktet P er her faldet til ca. $1/3$ af den klassiske bæreevne.

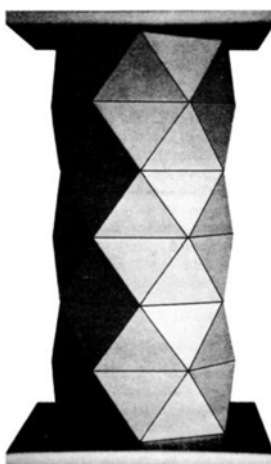


Figur 1.3 – Kempners aflastningskurve for en perfekt cylinderskal under enakset tryk

Det viste sig dog, at den manglende optimering mht. n/m -forholdet gav misvisende resultater. I flere arbejder af bl.a. Leggett og Jones (Leggett & Jones, 1942), Michielsen (Michielsen, 1948) og Kempner (Kempner, 1954) blev det vist, at når der også optimeres mht. til n/m -forholdet fås kun én veldefineret ligevægtsløsning efter, at den klassiske last er nået. Kempners kurve er vist i Figur 1.3.

Disse resultater viste sig også at være ufuldstændige. I 1966 viste Hoff (Hoff, 1966) at inddragelse af mange flere parametre, som nu kunne behandles vha. computerberegninger, ville medføre at bæreevnen efter aflastning kunne blive meget lav, afhængigt af skaltykkelsen h . For $h \rightarrow 0$ vil bæreevnen også gå imod nul.

Denne opførsel blev forklaret i 1955 af den japanske professor Yoshimura (Yoshimura, 1955). Han forklarede at den cirkulære cylinderskals midterflade, som er udfoldelig, deformeres til en anden udfoldelig flade, der består af et antal trekanter, se Figur 1.4. Den eneste modstand mod denne udbøjning vil være bøjningsmodstanden langs trekantens rand. Dette deformationsmønster observeres ofte i praksis på dele af skallen og betegnes Yoshimuras diamantmønster.



Figur 1.4 – Yoshimuras diamantmønster

DEL 1

GENEREL SKALTEORI

DEL 1

2 Grundlag

Der gives i dette afsnit en kortfattet redegørelse for koordinatbeskrivelsen og nogle af de mest grundlæggende formler i fladeteorien.

Det forudsættes at når vektorligninger skrives ud i koordinatligninger benyttes et højrehåndskoordinatsystem.

Overalt i det følgende benyttes Einsteins summationskonvention, hvilket betyder at når et eller flere indices i et produkt gentages to gange summeres over alle de størrelser, der fås ved at lade de pågældende indices gennemløbe de på forhånd definerede værdier. Summationskonventionen sættes ud af kraft vha. parenteser omkring de pågældende indices.

2.1 Metrik

En tynd skalkonstruktion opfattes som nævnt som en flade i rummet "belagt" med en masse, som målt langs fladens normal har samme tykkelse til begge sider. Fladen betegnes skallens midterflade og den samlede tykkelse målt langs normalen betegnes skaltykkelsen h .

Iht. Love-Kirchhoffs forudsætninger antages det, at normalen under en deformation forbliver ret og desuden regnes den ustrækkelig. I det simpleste tilfælde, hvor forskydningskræfternes bidrag negligeres, vil normalen ligeledes forblive vinkelret på skallens midterflade.

Med disse forudsætninger bliver skalteorien en todimensional teori, idet alle størrelser beskrives vha. midterfladens koordinater.

Skallens midterflade, som beskrevet i indledningen, tænkes givet ved funktionen

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$$

der også kan skrives på formen

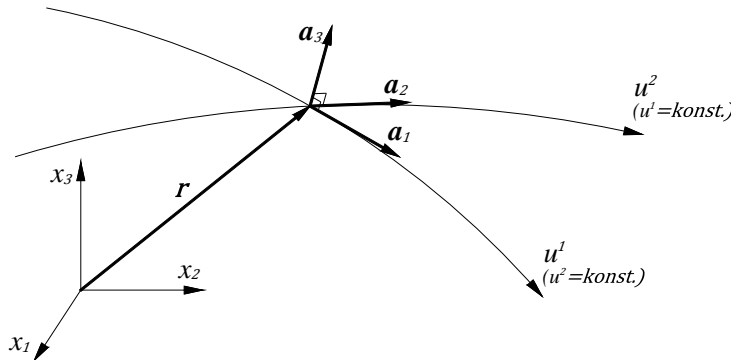
$$\mathbf{r} = x_1(u^1, u^2)\mathbf{e}_1 + x_2(u^1, u^2)\mathbf{e}_2 + x_3(u^1, u^2)\mathbf{e}_3 \quad (2.1)$$

Her er \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 og \mathbf{e}_3 enhedsvektorer langs hhv. x_1 -, x_2 - og x_3 -aksen.

Holdes fx u^2 konstant beskriver funktionen en kurve på fladen, en u^1 -koordinatkurve. På tilsvarende måde defineres en u^2 -koordinatkurve, se Figur 2.1.

I mange tilfælde er det hensigtsmæssigt at vælge de krumlinede koordinater således, at koordinatkurvernes tangenter står vinkelret på hinanden. Dermed haves ortogonale krumlinede koordinater.

Betragtes forskellige kurver på fladen, som går igennem samme punkt, vil tangenterne til disse kurver, i punktet, ligge i samme plan. Denne plan betegnes tangentplanen. Normalen til tangentplanen betegnes fladenormalen.



Figur 2.1 – Koordinatkurver

2.2 Længde- og arealforhold

Tangenten langs en u^1 -koordinatkurve betegnes \mathbf{a}_1 og tangenten langs en u^2 -koordinatkurve betegnes \mathbf{a}_2 svarende til

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} \quad \alpha = (1,2) \quad (2.2)$$

Vektorene \mathbf{a}_α kaldes de kovariante basisvektorer.

Gives u^1 en tilvækst du^1 og u^2 en tilvækst du^2 bliver tilvæksten til stedvektoren

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} du^\alpha = \mathbf{a}_\alpha du^\alpha \quad (2.3)$$

Længden af tilvæksten til stedvektoren betegnes ds og bestemmes ved

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\beta} du^\alpha du^\beta = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta du^\alpha du^\beta = a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \quad (2.4)$$

Størrelsen $a_{\alpha\beta}$ kaldes fladens kovariante metriske tensor og formelen

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \quad (2.5)$$

kaldes fladens første fundamentale form. Det ses, at $a_{\alpha\beta}$ er symmetrisk, dvs. $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$.

Det viser sig nyttigt at have et andet sæt basisvektorer, de kontravariante basisvektorer \mathbf{a}^β . De er fastlagt ved

$$\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta = \delta_\alpha^\beta \quad (2.6)$$

Her er δ_α^β Kroneckers delta, der i fladeteorien har værdierne

$$\delta_1^1 = \delta_2^2 = 1 \quad \delta_2^1 = \delta_1^2 = 0 \quad (2.7)$$

Det ses, at \mathbf{a}^1 er defineret til at være vinkelret på \mathbf{a}_2 og \mathbf{a}^2 vinkelret på \mathbf{a}_1 . Desuden er de skalære produkter $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}^2$ og $\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_2$ altså positive og lig med 1.

På grundlag af den kontravariante basisvektor \mathbf{a}^α defineres den kontravariante metriske tensor

$$a^{\alpha\beta} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta \quad (2.8)$$

Det ses, at $a^{\alpha\beta}$ også er symmetrisk.

Specielt gælder der for et sædvanligt retvinklet koordinatsystem at $a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, hvor Kroneckers delta $\delta_{\alpha\beta}$ er defineret ved

$$\delta_{11} = \delta_{22} = 1 \quad \delta_{12} = \delta_{21} = 0 \quad (2.9)$$

Tilsvarende bliver $a^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$ med analog definition af Kronecker deltaet $\delta^{\alpha\beta}$.

Længden af basisvektorerne ses at være

$$|\mathbf{a}_\alpha| = \sqrt{\mathbf{a}_{(\alpha)} \cdot \mathbf{a}_{(\alpha)}} = \sqrt{a_{(\alpha\alpha)}} \quad (2.10)$$

$$|\mathbf{a}^\alpha| = \sqrt{\mathbf{a}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{a}^{(\alpha)}} = \sqrt{a^{(\alpha\alpha)}} \quad (2.11)$$

Haves en vilkårlig vektor i tangentplanen \mathbf{v} kan den opløses efter basisvektorerne på følgende måde

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{a}_1 + v^2 \mathbf{a}_2 = v^\alpha \mathbf{a}_\alpha \quad (2.12)$$

$$\mathbf{v} = v_\alpha \mathbf{a}^\alpha \quad (2.13)$$

Størrelserne v^α og v_α kaldes hhv. vektorens kontravariante komponenter og vektorens kovariante komponenter.

Multipliseres (2.12) skalært med \mathbf{a}^β fås

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^\beta = v^\alpha \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta = v^\alpha \delta_\alpha^\beta = v^\beta \quad (2.14)$$

Her er Kroneckers delta, δ_β^α , benyttet som substitutionsoperator.

Ved indsættelse i (2.12) fås følgende relation, som ofte vil blive brugt i det følgende

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^\alpha) \mathbf{a}_\alpha \quad (2.15)$$

På tilsvarende vis findes

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_\alpha) \mathbf{a}^\alpha \quad (2.16)$$

Bemærk at kvadratet af en vektor \mathbf{v} i tangentplanen er

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (v^\alpha \mathbf{a}_\alpha) \cdot (v_\beta \mathbf{a}^\beta) = v^\alpha v_\alpha \quad (2.17)$$

Tilsvarende ses, at det skalære produkt mellem to vektorer \mathbf{v} og \mathbf{w} i tangentplanen er

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (v^\alpha \mathbf{a}_\alpha) \cdot (w_\beta \mathbf{a}^\beta) = v^\alpha w_\alpha = v_\alpha w^\alpha \quad (2.18)$$

Benyttes relationen i (2.15) på den kontravariante basisvektor \mathbf{a}^α fås

$$\mathbf{a}^\alpha = (\mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta) \mathbf{a}_\beta = a^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta \quad (2.19)$$

Tilsvarende findes for \mathbf{a}_α

$$\mathbf{a}_\alpha = a_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\beta \quad (2.20)$$

Det ses, at

$$\mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta = (a^{\alpha\lambda} \mathbf{a}_\lambda) \cdot (a_{\beta\gamma} \mathbf{a}^\gamma) = a^{\alpha\lambda} a_{\beta\gamma} \delta_\lambda^\gamma = a^{\alpha\lambda} a_{\beta\lambda} \quad (2.21)$$

Jf. (2.6) haves dermed

$$a^{\alpha\lambda} a_{\beta\lambda} = \delta_\beta^\alpha \quad (2.22)$$

Vha. denne relation kan komponenterne i $a^{\alpha\lambda}$ bestemmes, idet (2.22) betragtes som et lineært ligningssystem. På denne måde findes følgende nyttige sammenhænge:

$$a^{11} = \frac{a_{22}}{a} \quad a^{22} = \frac{a_{11}}{a} \quad a^{12} = a^{21} = \frac{-a_{12}}{a} \quad (2.23)$$

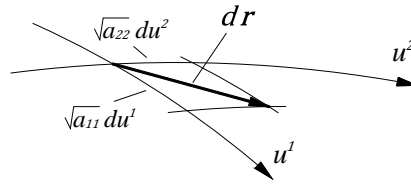
Her er a determinanten $|a_{\alpha\beta}|$

$$a = |a_{\alpha\beta}| = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \quad (2.24)$$

Arealet basisvektorerne \mathbf{a}_1 og \mathbf{a}_2 udspænder, er lig med \sqrt{a} idet

$$\sin \angle_{12} = \frac{\text{Areal}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} = \sqrt{1 - \cos^2 \angle_{12}} = \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1| |\mathbf{a}_2|} \right)^2} = \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{\sqrt{a_{11}a_{22}}} \quad (2.25)$$

Her er \angle_{12} vinkelen mellem basisvektorerne.



Figur 2.2 – Arealelement

Arealelementet svarende til tilvækster du^1 og du^2 bliver herved $\sqrt{a} du^1 du^2$, idet sidelængderne er hhv. $du^1 \sqrt{a_{11}}$ og $du^2 \sqrt{a_{22}}$

Sammenhængen mellem en vektors ko- og kontravariante komponenter findes ved at indsætte resultatet fra formel (2.19) i (2.13), som ved udskrivning ses at give

$$\mathbf{v} = v_\alpha \mathbf{a}^\alpha = v_\alpha a^{\alpha\lambda} \mathbf{a}_\lambda = v^\lambda \mathbf{a}_\lambda \quad (2.26)$$

Dvs.

$$v^\lambda = a^{\lambda\alpha} v_\alpha \quad (2.27)$$

Tilsvarende findes

$$v_\lambda = a_{\lambda\alpha} v^\alpha \quad (2.28)$$

$a^{\lambda\alpha}$ kan altså benyttes til at hæve ét indeks og $a_{\lambda\alpha}$ til at sænke ét indeks.

Hævning og sænkning af to indices gøres tilsvarende

$$v^{\alpha\beta} = a^{\alpha\lambda} a^{\beta\gamma} v_{\lambda\gamma} \quad (2.29)$$

$$v_{\alpha\beta} = a_{\alpha\lambda} a_{\beta\gamma} v^{\lambda\gamma} \quad (2.30)$$

2.3 Krumningsforhold

En enhedsvektor i fladenormalens retning benævnes \mathbf{a}_3 , se Figur 2.1, og er bestemt ved

$$\mathbf{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{a}} (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \quad (2.31)$$

Vha. den såkaldte permutationstensor $e_{\alpha\beta}$, hvor

$$e_{12} = -e_{21} = \sqrt{a} \quad e_{11} = e_{22} = 0 \quad (2.32)$$

kan parenteser i (2.31) skrives

$$\mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_\beta = e_{\alpha\beta} \mathbf{a}_3 \quad (2.33)$$

Permutationstensoren $e^{\alpha\beta}$ bestemmes ved hævnning af indices

$$e^{\alpha\beta} = a^{\alpha\gamma} a^{\beta\lambda} e_{\gamma\lambda} \quad (2.34)$$

For permutationstensoren gælder, at

$$e^{\alpha\mu} e_{\gamma\mu} = \delta_{\gamma}^{\alpha} \quad (2.35)$$

hvorved det ses, at

$$e^{12} = -e^{21} = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad e^{11} = e^{22} = 0 \quad (2.36)$$

For de metriske tensorer gælder specielt at

$$a_{\alpha\beta} = e_{\alpha\rho} e_{\beta\gamma} a^{\rho\gamma} \quad (2.37)$$

$$a^{\alpha\beta} = e^{\alpha\rho} e^{\beta\gamma} a_{\rho\gamma} \quad (2.38)$$

Desuden gælder følgende vigtige formler

$$\mathbf{a}^{\alpha} \times \mathbf{a}^{\beta} = e^{\alpha\beta} \mathbf{a}_3 \quad (2.39)$$

$$\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_{\alpha} = e_{\alpha\beta} \mathbf{a}^{\beta} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}^{\alpha} = e^{\alpha\beta} \mathbf{a}_{\beta} \quad (2.41)$$

Det første udtryk findes ved at hæve indices i (2.33). De sidste to kan verificeres ved udskrivning.

2.3.1 Krumningen af midterfladen

Krumningen af midterfladen bestemmes ved krumningstensoren $b_{\alpha\beta}$, der er givet ved

$$b_{\alpha\beta} = -\frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial u^{\beta}} \cdot \mathbf{a}_{\alpha} \quad (2.42)$$

Formlen kaldes fladens anden fundamentale form.

Da $\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{\alpha} = 0$ og dermed $\frac{\partial(\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{\alpha})}{\partial u^{\beta}} = 0$ gælder også at

$$b_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_{\alpha}}{\partial u^{\beta}} = \mathbf{a}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_{\beta}}{\partial u^{\alpha}} \quad (2.43)$$

Indføres (2.2) kan krumningstensoren skrives

$$b_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_3 \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\beta}} \quad (2.44)$$

Det ses umiddelbart, at $b_{\alpha\beta}$ er symmetrisk. Desuden ses at b_{11} og b_{22} er normalkrumningerne af koordinatkurverne, mens $b_{12} = b_{21}$ er fladens torsion, se den senere formel (2.50).

2.3.2 Normalkrumning

Normalkrumningen $\frac{1}{R}$ af en vilkårlig kurve i fladen bestemmes på følgende måde. Har kurven enhedstangentvektoren \mathbf{h} og er s buelængden af den betragtede kurve er normalkrumningen

$$\frac{1}{R} = \mathbf{a}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial s} \quad (2.45)$$

Idet $d\mathbf{r} = \mathbf{a}_\alpha du^\alpha$, jf (2.3), ses det, at enhedsvektoren kan skrives

$$\mathbf{h} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{du^\alpha}{ds} \mathbf{a}_\alpha = h^\alpha \mathbf{a}_\alpha \quad (2.46)$$

At \mathbf{h} er en enhedsvektor ses ud fra følgende, hvor ds^2 bestemt af (2.4) benyttes,

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = \left(\frac{du^\alpha}{ds} \mathbf{a}_\alpha \right) \cdot \left(\frac{du^\beta}{ds} \mathbf{a}_\beta \right) = a_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} = 1 \quad (2.47)$$

Da $\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{h} = 0$ og dermed $\frac{\partial(\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{h})}{\partial s} = 0$ kan (2.45) også skrives

$$\frac{1}{R} = -\frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial s} \cdot \mathbf{h} \quad (2.48)$$

Med indførelse af krumningstensoren $b_{\alpha\beta}$ og $h^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds}$, kan normalkrumningen endelig skrives

$$\frac{1}{R} = b_{\alpha\beta} h^\alpha h^\beta \quad (2.49)$$

2.3.3 Torsion

Torsionen $\frac{1}{T}$ af den vilkårlige kurve defineres ved

$$\frac{1}{T} = \mathbf{a}_3 \cdot \frac{\partial(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{h})}{\partial s} = \mathbf{a}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} \quad (2.50)$$

$\mathbf{t} = \mathbf{a}_3 \times \mathbf{h}$ ligger i tangentplanen vinkelret på \mathbf{h} og kan jf. formel (2.40) skrives som

$$\mathbf{t} = t^\gamma \mathbf{a}_\gamma = e^{\alpha\gamma} h_\alpha \mathbf{a}_\gamma \quad (2.51)$$

Benyttes at $\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{t} = 0$ og dermed $\frac{\partial(\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{t})}{\partial s} = 0$, findes, som ovenfor

$$\frac{1}{T} = b_{\alpha\beta} e^{\alpha\gamma} h_\alpha h^\beta = b_{\alpha\beta} t^\alpha h^\beta \quad (2.52)$$

De tre vektorer \mathbf{h} , \mathbf{t} og \mathbf{a}_3 er i højrestilling idet vektorproduktet $\mathbf{h} \times \mathbf{t}$ har samme retning som \mathbf{a}_3 .

Eftersom \mathbf{h} er en enhedsvektor, er \mathbf{t} også en enhedsvektor.

Summen af normalkrumningerne i to på hinanden vinkelrette retninger er

$$2H = b_1^1 + b_2^2 = b_\alpha^\alpha \quad (2.53)$$

som er en invariant dvs. konstant under en koordinattransformation. Størrelsen H kaldes middelkrumningen.

Der findes altid to på hinanden vinkelrette retninger, hvor torsionen er nul, og i disse retninger er normalkrumningerne ekstremale. De betegnes naturligvis hovedkrumningerne og de tilsvarende retninger hovedretninger.

2.4 Christoffel-symboler

Betragtes en vilkårlig vektor \mathbf{v} , nu i rummet, kan denne opløses efter basisvektorerne og fladenormalen, dvs.

$$\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{a}_\alpha + v^3 \mathbf{a}_3 = v_\alpha \mathbf{a}^\alpha + v_3 \mathbf{a}_3 \quad (2.54)$$

Ved at multiplicere skalært med hhv. \mathbf{a}^β og \mathbf{a}_3 fås

$$v^\beta = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^\beta \quad (2.55)$$

$$v^3 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_3 \quad (2.56)$$

hvorved (2.54) kan omskrives til

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^\alpha) \mathbf{a}_\alpha + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_3) \mathbf{a}_3 \quad (2.57)$$

Benyttes (2.57) på $\frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta}$ fås

$$\frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta} = \left(\frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta} \cdot \mathbf{a}^\gamma \right) \mathbf{a}_\gamma + \left(\frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta} \cdot \mathbf{a}_3 \right) \mathbf{a}_3 \quad (2.58)$$

For faktoren til \mathbf{a}_α , som beskriver tilvæksten i basisvektorerne retninger, indføres betegnelsen

$$\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta} \cdot \mathbf{a}^\gamma \quad (2.59)$$

Denne størrelse kaldes Christoffel-symbolet af 2. art. Bemærk at Christoffel-symbolet ikke er en tensor. Desuden bemærkes det, at Christoffel-symbolet er symmetrisk i α og β da $\frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta} = \frac{\partial \mathbf{a}_\beta}{\partial u^\alpha}$.

Faktoren til \mathbf{a}_3 i (2.58) er iflg. (2.43) lig med $b_{\alpha\beta}$ og dermed haves

$$\frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta} = \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} \mathbf{a}^\gamma + b_{\alpha\beta} \mathbf{a}_3 \quad (2.60)$$

Når den vilkårlige vektor i rummet opløses efter de kontravariante basisvektorer fås

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_\alpha) \mathbf{a}^\alpha + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_3) \mathbf{a}_3 \quad (2.61)$$

Og dermed

$$\frac{\partial \mathbf{a}^\alpha}{\partial u^\beta} = - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \gamma \end{matrix} \right\} \mathbf{a}^\gamma + b_\beta^\alpha \mathbf{a}_3 \quad (2.62)$$

Er $\frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial u^\alpha}$ nu den vilkårlige vektor i (2.57) fås

$$\frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial u^\alpha} = \left(\frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial u^\alpha} \cdot \mathbf{a}^\gamma \right) \mathbf{a}_\gamma + \left(\frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial u^\alpha} \cdot \mathbf{a}_3 \right) \mathbf{a}_3 \quad (2.63)$$

Da $\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 0$ og dermed $\frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial u^\beta} \cdot \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial u^\beta} = 0$ er faktoren til \mathbf{a}_3 lig med nul. Faktoren til \mathbf{a}_γ kan omskrives til

$$\mathbf{a}^\gamma \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial u^\alpha} = -(\mathbf{a}^{\gamma\lambda} \mathbf{a}_\gamma) \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial u^\alpha} = \mathbf{a}^{\gamma\lambda} b_{\alpha\lambda} = b_\alpha^\gamma \quad (2.64)$$

Dermed kan (2.63) reduceres til

$$\frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial u^\alpha} = -b_\alpha^\gamma \mathbf{a}_\gamma = -b_{\gamma\alpha} \mathbf{a}^\gamma \quad (2.65)$$

Denne formel kaldes Weingartens formel.

Christoffel-symbolet af 1. art betegnes $[\alpha \beta, \gamma]$ og er bestemt ved

$$[\alpha \beta, \gamma] = a_{\lambda\gamma} \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} \quad (2.66)$$

og dermed er

$$\left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} = a^{\lambda\gamma} [\alpha \beta, \gamma] \quad (2.67)$$

2.5 Kovariant differentiation

Betragt igen en vilkårlig vektor i rummet \mathbf{v} opløst efter basisvektorerne og fladenormalen. De partielle afledede af \mathbf{v} mht. u^β er

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^\beta} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^\beta} \mathbf{a}_\alpha + v^\alpha \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta} + \frac{\partial v^3}{\partial u^\beta} \mathbf{a}_3 + v^3 \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial u^\beta} \quad (2.68)$$

som vha. formlerne (2.60) og (2.65) kan omskrives til

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^\beta} &= \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^\beta} \mathbf{a}_\alpha + v^\alpha \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} \mathbf{a}_\gamma + v^\alpha b_{\alpha\beta} \mathbf{a}_3 + \frac{\partial v^3}{\partial u^\beta} \mathbf{a}_\gamma - v^3 b_\beta^\gamma \mathbf{a}_\gamma \\ &= \left(\frac{\partial v^\gamma}{\partial u^\beta} + \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} v^\alpha + b_\beta^\gamma v^\alpha \right) \mathbf{a}_\gamma + \left(\frac{\partial v^3}{\partial u^\beta} + b_{\alpha\beta} v^\alpha \right) \mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (2.69)$$

Faktoren til \mathbf{a}_γ kaldes den kovariante afledede af v^γ og den skrives

$$v_{,\beta}^\gamma = \frac{\partial v^\gamma}{\partial u^\beta} + \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} v^\alpha \quad (2.70)$$

Dermed kan (2.66) skrives

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial u^\beta} = (v_{,\beta}^\gamma + b_\beta^\gamma v^3) \mathbf{a}_\gamma + \left(\frac{\partial v^3}{\partial u^\beta} + b_{\gamma\beta} v^\gamma \right) \mathbf{a}_3 \quad (2.71)$$

Opløses v i stedet for efter de kovariante basisvektorer fås

$$\frac{\partial v}{\partial u^\beta} = (v_{\gamma,\beta} - b_{\beta\gamma} v_3) a^\gamma + \left(\frac{\partial v^3}{\partial u^\beta} + b_\beta^\gamma v_\gamma \right) a_3 \quad (2.72)$$

hvor den kovariante aflede $v_{\gamma,\beta}$ er defineret ved

$$v_{\gamma,\beta} = \frac{\partial v_\gamma}{\partial u^\beta} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \gamma \beta \end{matrix} \right\} v_\alpha \quad (2.73)$$

Kovariant differentiation kan generaliseres til tensorer af vilkårlig orden. Den kovariante afledede af tensoren $A_{\gamma\rho}^{\alpha\beta}$ er fx defineret ved

$$A_{\gamma\rho,\lambda}^{\alpha\beta} = \frac{\partial A_{\gamma\rho}^{\alpha\beta}}{\partial u^\lambda} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu \lambda \end{matrix} \right\} A_{\gamma\rho}^{\mu\beta} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \mu \lambda \end{matrix} \right\} A_{\gamma\rho}^{\alpha\mu} - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \gamma \lambda \end{matrix} \right\} A_{\mu\rho}^{\alpha\beta} - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \rho \lambda \end{matrix} \right\} A_{\gamma\mu}^{\alpha\beta} \quad (2.74)$$

Det ses at placeringen af summationsindekset, i dette tilfælde μ , for de kontravariante indices sker som i (2.70) ved først at udskifte α med μ og herefter β med μ . Tilsvarende følger placeringen af summationsindekset for de kovariante indices formel (2.73). Bemærk desuden at der kommer forskellige fortegn for kontra- og kovariante indices.

Den kovariante afledede af en skalar A defineres som den sædvanlige partielle afledede

$$A_{,\lambda} = \frac{\partial A}{\partial u^\lambda} \quad (2.75)$$

Det kan vises, at de kovariante afledede bliver tensorer. Endvidere kan det vises, at de kovariante afledede af de metriske tensorer og permutationstensorerne er nul

$$a_{\alpha\beta,\gamma} = 0 \quad a_{,\gamma}^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.76)$$

$$e_{\alpha\beta,\gamma} = 0 \quad e_{,\gamma}^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.77)$$

Der gælder de sædvanlige differentiationsregneregler for kovariante afledede af summer og produkter.

For de kovariante afledede af krumningstensoren gælder

$$b_{\alpha\beta,\lambda} = b_{\alpha\lambda,\beta} \quad (2.78)$$

Fire af disse otte ligninger er identiteter af formen $b_{11,1} = b_{11,1}$. De resterende fire giver kun to forskellige betingelser som er

$$b_{\alpha 1,1} = b_{\alpha 2,1} \quad \alpha = (1,2) \quad (2.79)$$

3 Ligevægtsligningerne

I dette afsnit opstilles ligevægtsligningerne for en skalkonstruktion, da disse er essentielle for resten af afhandlingen. Ligningerne opstilles for en skal af given form under forudsætning af kendt belastning og kendte snitkræfter. Ligevægtsligningerne bliver derfor i denne forstand eksakte.

Til disse ligevægtsligninger hører naturligvis et sæt randbetingelser. Disse vil ikke blive opskrevet her, men der henvises til (Nielsen, 2004), afsnit 7.

3.1 Snitkræfter i en skalkonstruktion

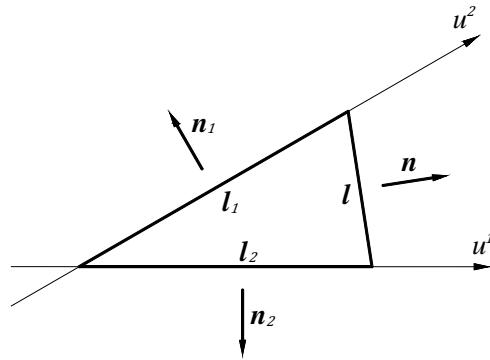
Snitkræfterne i skallen angives ligesom i en plade ved den statiske ækvivalens pr. længdeenhed. I en skalkonstruktion fås i et normalsnit med den udadrettede normal \mathbf{n} , dvs. et snit som indeholder normalvektoren \mathbf{a}_3 , et moment pr. længdeenhed og en kraft pr. længdeenhed.

Momentet pr. længdeenhed er en vektor og betegnes $\mathbf{M}_{(n)}$, hvor indeks (n) benyttes som reference til normalsnittet. Indices som er sat i parentes betyder, som tidligere nævnt, at summationskonvektionen ikke skal benyttes. I alle skal- og pladeteorier er det en grundlæggende forudsætning, at momentvektoren ikke har nogen komponent i normalens retning, i dette tilfælde \mathbf{a}_3 's retning. Beregnes momentet pr. længdeenhed om normalen af en vilkårlig kontinuert normalspændingsfordeling findes, at dette moment går imod nul, når den længde, hvor momentet beregnes for, går mod nul. Dette skyldes naturligvis, at dette moment indeholder den kvadrerede længde.

Kraften pr. længdeenhed i snittet betegnes $\mathbf{N}_{(n)}$. Mens $\mathbf{M}_{(n)}$ altså ligger i tangentplanen, ligesom i en plade, kan $\mathbf{N}_{(n)}$ have en vilkårlig retning. Komponenterne i tangentplanen, hvilket svarer til skive- eller membrandelen, betegnes med N^α , mens komponenten i normalens retning, forskydningskraften, betegnes med bogstavet Q .

Fortegnsregningen for snitkræfterne i snit langs koordinatkurverne fastlægges således, at der i et snit langs en u^1 -koordinatkurve er det snittet med u^2 -koordinatkurven som udadgående kurve, der benyttes til fastlæggelse af fortegnsregning. Tilsvarende gælder for et snit langs en u^2 -koordinatkurve.

For at bestemme sammenhængen mellem snitkræfterne i koordinatretningerne og i et vilkårligt snit udledes en formel for normalen \mathbf{n} til det vilkårlige snit udtrykt ved normalerne \mathbf{n}_1 og \mathbf{n}_2 i to givne snit. Disse to snit vil ved anvendelserne naturligvis være normalsnit i koordinatretningerne.



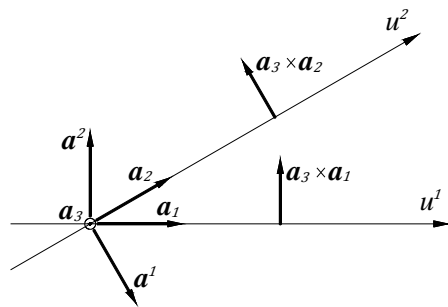
Figur 3.1 – Vilkårlig trekant i tangentplanen med udadrettede enhedsnormaler \mathbf{n} , \mathbf{n}_1 og \mathbf{n}_2

For vilkårlig trekant med sidelængderne l , l_1 og l_2 og med de udadrettede enhedsnormaler \mathbf{n} , \mathbf{n}_1 og \mathbf{n}_2 , se Figur 3.1, gælder

$$\mathbf{n}l + \mathbf{n}_1l_1 + \mathbf{n}_2l_2 = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

Denne formel kan fx udledes ved at betragte spændingstilstanden plant hydrostatisk træk.

Basisvektorerne \mathbf{a}_α , \mathbf{a}^α og skalnormalen \mathbf{a}_3 samt vektoren $\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_\alpha$ er vist i Figur 3.2.



Figur 3.2 – Vektorbetegnelser

Jf. Figur 3.1 og Figur 3.2 findes således at enhedsnormalvektorerne kan skrives

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_2|} = \frac{e_{21}\mathbf{a}^1}{\sqrt{a_{22}}} = -\frac{\sqrt{a}\mathbf{a}^1}{\sqrt{a_{22}}} = -\frac{\mathbf{a}^1}{\sqrt{a^{11}}} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{n}_2 = -\frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|} = -\frac{e_{12}\mathbf{a}^2}{\sqrt{a_{11}}} = -\frac{\sqrt{a}\mathbf{a}^2}{\sqrt{a_{11}}} = -\frac{\mathbf{a}^2}{\sqrt{a^{22}}} \quad (3.3)$$

Af formel (3.1) følger dermed

$$\mathbf{n}l = \frac{\mathbf{a}^2}{\sqrt{a^{22}}}l_2 + \frac{\mathbf{a}^1}{\sqrt{a^{11}}}l_1 \quad (3.4)$$

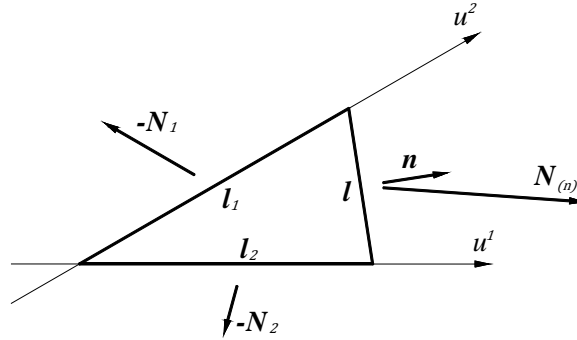
Idet $\mathbf{n} = n_1\mathbf{a}^1 + n_2\mathbf{a}^2 = n_\alpha\mathbf{a}^\alpha$ fås ved multiplikation med hhv. \mathbf{a}_1 og \mathbf{a}_2

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_1 l = \frac{1}{\sqrt{a^{11}}}l_1 \Rightarrow n_1 l = \frac{1}{\sqrt{a^{11}}}l_1 \quad n_2 l = \frac{1}{\sqrt{a^{22}}}l_2 \quad (3.5)$$

Dvs.

$$l_1 = n_1 \sqrt{a^{11}} l \quad l_2 = n_2 \sqrt{a^{22}} l \quad (3.6)$$

Herved kendes alle størrelser i (3.1).



Figur 3.3 – Infinitesimal trekant i tangentplanen påvirket af kræfterne $N_{(n)}$, N_1 og N_2 , der kan have komponenter i alle retninger

Betragtes nu en infinitesimal trekant i tangentplanen, som vist i Figur 3.3, som har sidelængderne l , $l_1 = \sqrt{a^{22}} du^2$ og $l_2 = \sqrt{a^{11}} du^1$, svarende til koordinatvæksterne du^1 og du^2 , gælder ligevægtsbetingelsen

$$N_{(n)}l = N_1l_1 + N_2l_2 \quad (3.7)$$

Af (3.6) fås

$$N_{(n)} = N_1n_1\sqrt{a^{11}} + N_2n_2\sqrt{a^{22}} = N_\alpha n_\alpha \sqrt{a^{(\alpha\alpha)}} \quad (3.8)$$

Opløses N_α efter basisvektorerne og fladenormalen fås

$$N_\alpha = \mathbb{N}^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta + \mathbb{Q}^\alpha \mathbf{a}_3 \quad (3.9)$$

Indføres

$$N^{\alpha\beta} = \mathbb{N}^{\alpha\beta} \sqrt{a^{(\alpha\alpha)}} \quad N^\beta = N^{\alpha\beta} n_\alpha \quad (3.10)$$

$$Q^\alpha = \mathbb{Q}^\alpha \sqrt{a^{(\alpha\alpha)}} \quad Q = Q^\alpha n_\alpha \quad (3.11)$$

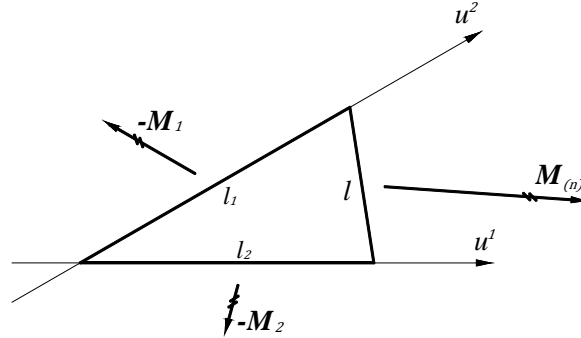
giver (3.8)

$$\begin{aligned} N_{(n)} &= \mathbb{N}^{\alpha\beta} \sqrt{a^{(\alpha\alpha)}} n_\alpha \mathbf{a}_\beta + \mathbb{Q}^\alpha \sqrt{a^{(\alpha\alpha)}} n_\alpha \mathbf{a}_3 \\ &= N^{\alpha\beta} n_\alpha \mathbf{a}_\beta + Q^\alpha n_\alpha \mathbf{a}_3 \\ &= N^\beta \mathbf{a}_\beta + Q \mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Første led på højre side i (3.12), $N^\beta \mathbf{a}_\beta$, er skivekræfternes bidrag mens det andet led $Q \mathbf{a}_3 = Q_{(n)}$ er forskydningskræfternes bidrag.

Desuden kan (3.9) skrives

$$N_\alpha = N^{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{a^{(\alpha\alpha)}}} a_\beta + Q^\alpha \frac{1}{\sqrt{a^{(\alpha\alpha)}}} a_3 \quad (3.13)$$



Figur 3.4 – Infinitesimal trekant i tangentplanen påvirket af momenterne $M_{(n)}$, M_1 og M_2 beliggende i planen

Momentlignevægt kræver jf. Figur 3.4 at

$$M_{(n)}l = M_1l_1 + M_2l_2 \quad (3.14)$$

Analogt til (3.8) fås

$$M_{(n)} = M_1n_1\sqrt{a^{11}} + M_2n_2\sqrt{a^{22}} = M_\alpha n_\alpha \sqrt{a^{(\alpha\alpha)}} \quad (3.15)$$

Skrives

$$M_\alpha = \mathbb{M}^{\alpha\beta} (a_3 \times a_\beta) = e_{\beta\lambda} \mathbb{M}^{\alpha\beta} a^\lambda \quad (3.16)$$

og indføres

$$M^{\alpha\beta} = \mathbb{M}^{\alpha\beta} \sqrt{a^{(\alpha\alpha)}} \quad (3.17)$$

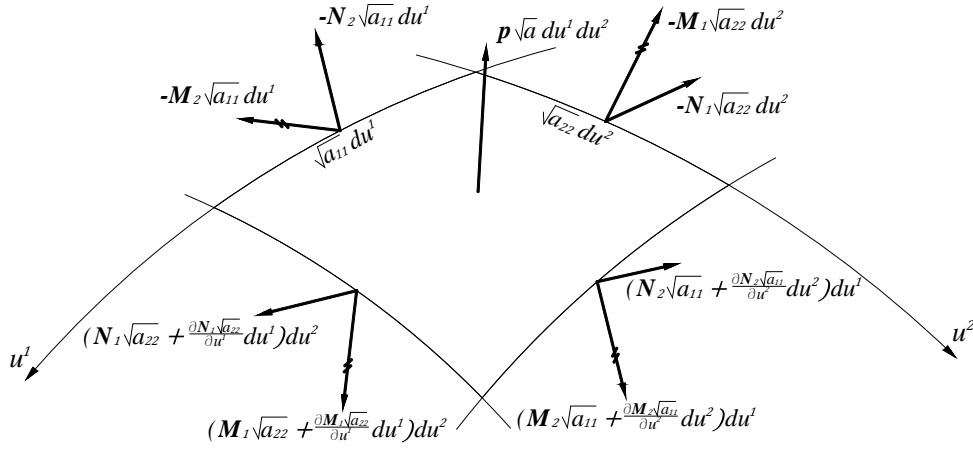
giver (3.15)

$$M_{(n)} = \mathbb{M}^{\alpha\beta} e_{\beta\lambda} a^\lambda n_\alpha \sqrt{a^{(\alpha\alpha)}} = e_{\beta\lambda} M^{\alpha\beta} n_\alpha a^\lambda = M_\lambda a^\lambda \quad (3.18)$$

Desuden kan (3.16) skrives

$$M_\alpha = M^{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{a^{(\alpha\alpha)}}} (a_3 \times a_\beta) = e_{\beta\lambda} M^{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{a^{(\alpha\alpha)}}} a^\lambda \quad (3.19)$$

3.2 Ligevægtsligninger



Figur 3.5 – Kræfter og momenter på et skalelement

I Figur 3.5 er vist de kræfter og momenter, der virker på et skalelement med sidelængderne $\sqrt{a_{11}} du^1$ og $\sqrt{a_{22}} du^2$ jf. Figur 3.3. Belastningen er givet ved kraften \mathbf{p} pr. arealenhed, hvilket betyder, at kraften på skalelementet er $\mathbf{p} \sqrt{a} du^1 du^2$. Opføres \mathbf{p} efter basisvektorerne og fladenormalen fås

$$\mathbf{p} = p^\alpha \mathbf{a}_\alpha + p^3 \mathbf{a}_3 \quad (3.20)$$

Benyttes sammenhængen fra (2.23) mellem a^{11} , a^{22} og $a^{12} = a^{21}$ og tilsvarende for de kovariante komponenter, ses det at projektligningerne kan skrives

$$\frac{\partial N_\gamma \sqrt{a} a^{(\gamma\gamma)}}{\partial u^\gamma} + \mathbf{p} \sqrt{a} = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

Momentligningen om koordinatlinjernes skæringspunkt bliver

$$\frac{\partial \mathbf{M}_\gamma \sqrt{a} a^{(\gamma\gamma)}}{\partial u^\gamma} + \mathbf{a}_\gamma \times [\mathbf{N}_\gamma \sqrt{a} a^{(\gamma\gamma)}] = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

Vedrørende bidraget fra normalkraften N_γ bemærkes, at der er tale om en grænseovergang, hvor $du^1 \rightarrow 0$ og $du^2 \rightarrow 0$. Herved udgår andenordens bidragene og de eneste førsteordensbidrag bliver krydsprodukterne mellem \mathbf{a}_1 og \mathbf{N}_1 og \mathbf{a}_2 og \mathbf{N}_2 , som i den plane teori.

Vha. (3.13) og (3.19) kan (3.21) og (3.22) skrives

$$\frac{\partial N^{\gamma\alpha} \sqrt{a} \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial Q^\gamma \sqrt{a} \mathbf{a}_3}{\partial u^\gamma} + \mathbf{p} \sqrt{a} = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial (M^{\gamma\alpha} \sqrt{a} (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_\alpha))}{\partial u^\gamma} + \mathbf{a}_\gamma \times [N^{\gamma\alpha} \sqrt{a} \mathbf{a}_\alpha + Q^\gamma \sqrt{a} \mathbf{a}_3] = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

Disse ligevægtsligninger i vektornotation kan omskrives til tensorligningerne

$$N_{,\gamma}^{\gamma\alpha} - b_{\gamma}^{\alpha} Q^{\gamma} + p^{\alpha} = 0 \quad (3.25)$$

$$N^{\gamma\alpha} b_{\gamma\alpha} + Q_{,\gamma}^{\gamma} + p^3 = 0 \quad (3.26)$$

$$M_{,\gamma}^{\gamma\alpha} - Q^{\alpha} = 0 \quad (3.27)$$

$$e_{\gamma\alpha} N^{\gamma\alpha} - e_{\gamma\alpha} b_{\lambda}^{\gamma} M^{\lambda\alpha} = 0 \quad (3.28)$$

Bemærk at $e_{\gamma\alpha}$ ikke kan fjernes fra (3.28). Desuden ses det, at ligningen (3.25) er analog til ligevægtsligningen for en plan skive (krumningstensoren er da lig med nul), mens (3.26) og (3.27) tilsammen er analoge med momentligningerne for en plade.

I ligevægtsligningerne optræder, som det ses, de kovariante afledte af $N^{\gamma\alpha}$, $M^{\gamma\alpha}$ og Q^{γ} .

Pga. normalsnittenes form i en skalkonstruktion er det umiddelbart naturligt at regne med, at både $N^{\gamma\alpha}$ og $M^{\gamma\alpha}$ er asymmetriske tensorer. I (Nielsen, 2004) er det dog vist, at man for tynde skaller godt kan regne både $N^{\gamma\alpha}$ og $M^{\gamma\alpha}$ for symmetriske tensorer uden, at der opstår væsentlige fejl. Imidlertid forhindrer momentligevægtsligningen (3.28), at både $N^{\gamma\alpha}$ og $M^{\gamma\alpha}$ kan regnes symmetriske. Derfor antages, som det også gøres i (Nielsen, 2004), at $N^{\gamma\alpha}$ er asymmetrisk men at $M^{\gamma\alpha}$ er symmetrisk.

Opløses $N^{\gamma\alpha}$ i en symmetrisk og en asymmetrisk del fås

$$N^{\gamma\alpha} = S^{\gamma\alpha} + F^{\gamma\alpha} = \frac{1}{2}(N^{\gamma\alpha} + N^{\alpha\gamma}) + \frac{1}{2}(N^{\gamma\alpha} - N^{\alpha\gamma}) \quad (3.29)$$

hvor $S^{\gamma\alpha}$ er symmetrisk og $F^{\gamma\alpha}$ asymmetrisk (det ses at $F^{11} = F^{22} = 0$ og $F^{12} = -F^{21}$).

Ligning (3.28) giver, idet det udnyttes at $S^{\gamma\alpha}$ er symmetrisk og dermed $e_{\gamma\alpha} S^{\gamma\alpha} = 0$

$$F^{12} = \frac{1}{2}b_{\lambda}^1 M^{\lambda 2} - \frac{1}{2}b_{\lambda}^2 M^{\lambda 1} \quad (3.30)$$

Det ses, at (3.30) og det tilsvarende udtryk for F^{21} kan skrives

$$F^{\gamma\alpha} = \frac{1}{2}M^{\lambda\alpha} b_{\lambda}^{\gamma} - \frac{1}{2}M^{\lambda\gamma} b_{\lambda}^{\alpha} \quad (3.31)$$

Formlen ses at gælde for alle γ og α .

Normalt indgår forskydningskræfterne Q^{γ} ikke i de konstitutive ligninger, hvorfor det er naturligt at eliminere Q^{γ} i (3.25) og (3.26) vha. (3.27).

De nødvendige og tilstrækkelige betingelser for ligevægt bliver da

$$S_{,\gamma}^{\gamma\alpha} - b_{\gamma}^{\alpha} M_{,\gamma}^{\gamma\alpha} + \frac{1}{2}(M^{\lambda\alpha} b_{\lambda}^{\gamma} - M^{\lambda\gamma} b_{\lambda}^{\alpha})_{,\gamma} + p^{\alpha} = 0 \quad (3.32)$$

$$S^{\gamma\alpha} b_{\gamma\alpha} + M_{,\gamma\gamma}^{\gamma\alpha} + p^3 = 0 \quad (3.33)$$

mens (3.27) og (3.31) bestemmer hhv. den asymmetriske komponent af $N^{\gamma\alpha}$ og forskydningskræfterne Q^{γ} .

DEL 1

4 Stabilitetsteori – Ligevægtsmetoden

En af metoderne i klassisk stabilitetsteori kaldes, som nævnt tidligere, ligevægtsmetoden, hvor nærliggende ligevægtstilstande betragtes. En nærliggende ligevægtstilstand tænkes her udviklet ud fra en given ligevægtstilstand ved en variation $\delta \mathbf{r}$ af stedvektoren \mathbf{r} .

Ved opskrivning af en variation af ligevægtstilstanden er der brug for variationerne af de geometriske parametre, som $\delta \mathbf{r}$ giver anledning til. Disse variationer bestemmes ved anvendelse af elementær variationsregning, se fx (Goldstein, et al., 2000), hvor hovedsageligt følgende forhold vil blive brugt:

- Variationen af differentialet er lig med differentialet af variationen fx

$$\frac{d}{dx}(\delta y) = \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) \quad d(\delta y) = \delta(dy) \quad (4.1)$$

- For variationer gælder samme regneregler som for differentiation.

Desuden bliver der, ved opskrivning af de varierede ligevægtsligninger, også brug for afledte størrelser af både de uvarierede og varierede geometriske parametre, hvorfor disse betragtes i det følgende.

4.1 Variation af geometriske parametre

Betragt først variationen (den første variation) af basisvektorerne \mathbf{a}_α . Af formel (2.2) haves

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} \quad (4.2)$$

Ved variation fås derved

$$\delta \mathbf{a}_\alpha = \delta \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} (\delta \mathbf{r}) \quad (4.3)$$

Opløses vektoren $\delta \mathbf{r}$ efter basisvektorerne og normalvektoren haves

$$\delta \mathbf{r} = \delta v^\alpha \mathbf{a}_\alpha + \delta w \mathbf{a}_3 = \delta v_\alpha \mathbf{a}^\alpha + \delta w \mathbf{a}_3 \quad (4.4)$$

Dermed fås vha. formlerne (2.71) og (2.72)

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{a}_\alpha &= \frac{\partial}{\partial u^\alpha} (\delta \mathbf{r}) = (\delta v_{,\alpha}^\gamma - b_\alpha^\gamma \delta w) \mathbf{a}_\gamma + \left(\frac{\partial(\delta w)}{\partial u^\alpha} + b_{\gamma\alpha}^\gamma \delta v^\gamma \right) \mathbf{a}_3 \\ &= (\delta v_{\gamma,\alpha} - b_{\alpha\gamma} \delta w) \mathbf{a}^\gamma + \left(\frac{\partial(\delta w)}{\partial u^\alpha} + b_\alpha^\gamma \delta v_\gamma \right) \mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Størrelserne δv^α , δv_α og δw betegnes flytninger.

Vha. dette udtryk kan den første variation af $a_{\alpha\beta}$ beregnes. Fra formel (2.4) haves

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta \quad (4.6)$$

og dermed

$$\begin{aligned} \delta a_{\alpha\beta} &= \delta \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta + \mathbf{a}_\alpha \cdot \delta \mathbf{a}_\beta \\ &= \left[(\delta v_{\gamma,\alpha} - b_{\alpha\gamma} \delta w) \mathbf{a}^\gamma + \left(\frac{\partial(\delta w)}{\partial u^\alpha} + b_\alpha^\gamma \delta v_\gamma \right) \mathbf{a}_3 \right] \cdot \mathbf{a}_\beta \\ &\quad + \left[(\delta v_{\gamma,\beta} - b_{\beta\gamma} \delta w) \mathbf{a}^\gamma + \left(\frac{\partial(\delta w)}{\partial u^\beta} + b_\beta^\gamma \delta v_\gamma \right) \mathbf{a}_3 \right] \cdot \mathbf{a}_\alpha \end{aligned} \quad (4.7)$$

Derved fås, idet $\mathbf{a}^\gamma \cdot \mathbf{a}_\beta = \delta_\beta^\gamma$, $\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}^\gamma = \delta_\alpha^\gamma$ og $\mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{a}_3 = 0$,

$$\delta a_{\alpha\beta} = \delta v_{\beta,\alpha} + \delta v_{\alpha,\beta} - 2b_{\alpha\beta} \delta w \quad (4.8)$$

hvilket vil vise sig at være en vigtig størrelse. Iflg. (2.4) haves nemlig

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \quad (4.9)$$

Da $\delta(ds)^2 = 2ds \delta(ds)$ fås

$$\delta(ds)^2 = 2ds \delta(ds) = \delta a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \Rightarrow \delta(ds) = \frac{1}{2} \delta a_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha du^\beta}{ds} \quad (4.10)$$

Den relative længdeændring $\delta\varepsilon = \frac{\delta(ds)}{ds}$ i retningen svarende til du^α bliver da

$$\delta\varepsilon = \frac{\delta(ds)}{ds} = \frac{1}{2} \delta a_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} \quad (4.11)$$

Fra (2.46) haves $h^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds}$ og dermed ses det, at (4.11), kan skrives

$$\delta\varepsilon_{(h)} = \delta\varepsilon_{\alpha\beta} h^\alpha h^\beta \quad (4.12)$$

hvor

$$\delta\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \delta a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta v_{\beta,\alpha} + \delta v_{\alpha,\beta}) - b_{\alpha\beta} \delta w \quad (4.13)$$

Tensoren $\delta\varepsilon_{\alpha\beta}$ er skalmidterfladens tøjningstensor, som ses at være symmetrisk.

Dernæst beregnes variationen af \mathbf{a}_3 . Da $\delta\mathbf{a}_3$ er parallel med skalmidterfladen fås jf.(2.61)

$$\delta\mathbf{a}_3 = (\mathbf{a}_\alpha \cdot \delta\mathbf{a}_3) \mathbf{a}^\alpha + (\mathbf{a}_3 \cdot \delta\mathbf{a}_3) \mathbf{a}_3 = (\mathbf{a}_\alpha \cdot \delta\mathbf{a}_3) \mathbf{a}^\alpha \quad (4.14)$$

Da endvidere

$$\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_3 = 0 \Rightarrow \mathbf{a}_\alpha \cdot \delta\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_3 \cdot \delta\mathbf{a}_\alpha \quad (4.15)$$

fås idet formel (4.5) benyttes, og det erindres, at \mathbf{a}_3 er en enhedsvektor

$$\delta \mathbf{a}_3 = -(\mathbf{a}_3 \cdot \delta \mathbf{a}_\alpha) \mathbf{a}^\alpha = -\left(\frac{\partial(\delta w)}{\partial u^\alpha} + b_\alpha^\gamma \delta v_\gamma\right) \mathbf{a}^\alpha \quad (4.16)$$

Den vigtige faktor til \mathbf{a}^α i (4.16) benævnes rotationen af fladenormalen som betegnes $\delta \theta_\alpha$ dvs.

$$\delta \mathbf{a}_3 = \delta \theta_\alpha \mathbf{a}^\alpha \quad \delta \theta_\alpha = -\left(\frac{\partial(\delta w)}{\partial u^\alpha} + b_\alpha^\gamma \delta v_\gamma\right) \quad (4.17)$$

Senere bliver der også brug for de afledede af variationen af \mathbf{a}_3 mht. u^α , som jf. formel (2.62) bliver

$$\frac{\partial(\delta \mathbf{a}_3)}{\partial u^\beta} = \frac{\partial}{\partial u^\beta} (\delta \theta_\alpha \mathbf{a}^\alpha) = \frac{\partial(\delta \theta_\alpha)}{\partial u^\beta} \mathbf{a}^\alpha + \delta \theta_\alpha \left(-\left\{\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \gamma \end{smallmatrix}\right\} \mathbf{a}^\gamma + b_\beta^\alpha \mathbf{a}_3\right) \quad (4.18)$$

som også kan skrives

$$\frac{\partial(\delta \mathbf{a}_3)}{\partial u^\beta} = \delta \theta_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\alpha + b_\beta^\alpha \delta \theta_\alpha \mathbf{a}_3 \quad (4.19)$$

idet formel (2.73) for den kovariante afledede er benyttet.

Af (4.17) fås

$$\delta \theta_{\alpha\beta} = -\left(\delta w_{,\alpha\beta} + b_{\alpha,\beta}^\gamma \delta v_\gamma + b_\alpha^\gamma \delta v_{\gamma,\beta}\right) \quad (4.20)$$

Den første variation af krumningstensoren $b_{\alpha\beta}$ kan nu bestemmes ud fra (2.42)

$$\begin{aligned} \delta b_{\alpha\beta} &= -\delta \mathbf{a}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial u^\beta} - \mathbf{a}_\alpha \cdot \frac{\partial(\delta \mathbf{a}_3)}{\partial u^\beta} \\ &= -\left[(\delta v_{\lambda,\alpha} - b_{\alpha\lambda} \delta w) \mathbf{a}^\lambda + \left(\frac{\partial(\delta w)}{\partial u^\alpha} + b_\alpha^\lambda \delta v_\lambda\right) \mathbf{a}_3\right] \cdot [-b_\beta^\gamma \mathbf{a}_\gamma] - \mathbf{a}_\alpha \cdot [\delta \theta_{\gamma\beta} \mathbf{a}^\gamma + b_\beta^\gamma \delta \theta_\gamma \mathbf{a}_3] \\ &= b_{\gamma\beta} (\delta v_{\gamma,\alpha} - b_{\alpha\gamma} \delta w) - \delta \theta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Næste skridt er at bestemme rotationsvektoren $\delta \Phi$, som består af komponenter i både tangentplanen og i normalens retning.

Rotationen $\delta \Omega$ af normalen \mathbf{a}_3 er defineret ved $\delta \mathbf{a}_3 = \delta \Omega \times \mathbf{a}_3$. Kun den løsning hvor vektoren $\delta \Omega$ ligger i tangentplanen¹ er af interesse og derfor fås jf. formel (2.41)

$$\delta \Omega = \mathbf{a}_3 \times \delta \mathbf{a}_3 = e^{\alpha\lambda} \delta \theta_\alpha \mathbf{a}_\lambda \quad (4.22)$$

For de afledede af $\delta \Omega$ gælder

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\delta \Omega)}{\partial u^\beta} &= \frac{\partial}{\partial u^\beta} (\mathbf{a}_3 \times \delta \mathbf{a}_3) = \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial u^\beta} \times \delta \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3 \times \frac{\partial(\delta \mathbf{a}_3)}{\partial u^\beta} \\ &= -b_{\beta\gamma} \mathbf{a}^\gamma \times (\delta \theta_\alpha \mathbf{a}^\alpha) + \mathbf{a}_3 \times (\delta \theta_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\alpha + b_\beta^\alpha \delta \theta_\alpha \mathbf{a}_3) \end{aligned} \quad (4.23)$$

¹ Løsningen $\delta \Omega$ til ligningen $\delta \mathbf{a}_3 = \delta \Omega \times \mathbf{a}_3$ er, når \mathbf{a}_3 er en enhedsvektor, $\delta \Omega = \mathbf{a}_3 \times \delta \mathbf{a}_3 + t \mathbf{a}_3$, hvor t er et vilkårligt tal. Når $\delta \Omega$ ligger i tangentplanen er $t = 0$.

hvor formel (2.65) samt ovenstående formler for $\delta \mathbf{a}_3$ og de afledede af $\delta \mathbf{a}_3$ er benyttet. Vha. (2.35) og (2.41) fås

$$\frac{\partial(\delta \Omega)}{\partial u^\beta} = e^{\alpha\lambda} \delta \theta_{\alpha,\beta} \mathbf{a}_\lambda + e^{\alpha\lambda} \delta \theta_\alpha \mathbf{a}_3 \quad (4.24)$$

For at kunne beregne rotationen $\delta \Omega_3$ om \mathbf{a}_3 beregnes først differentialet af $\delta \mathbf{r}$, dvs. $d(\delta \mathbf{r})$. Benyttes først (4.3) og dernæst (2.57) med $\delta \mathbf{a}_\alpha$ som den vilkårlige vektor fås

$$\begin{aligned} d(\delta \mathbf{r}) &= \frac{\partial(\delta \mathbf{r})}{\partial u^\alpha} du^\alpha = \delta \mathbf{a}_\alpha du^\alpha \\ &= (\mathbf{a}_\beta \cdot \delta \mathbf{a}_\alpha) \mathbf{a}^\beta du^\alpha + (\mathbf{a}_3 \cdot \delta \mathbf{a}_\alpha) \mathbf{a}_3 du^\alpha \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{a}_\beta \cdot \delta \mathbf{a}_\alpha + \mathbf{a}_\alpha \cdot \delta \mathbf{a}_\beta + \mathbf{a}_\beta \cdot \delta \mathbf{a}_\alpha - \mathbf{a}_\alpha \cdot \delta \mathbf{a}_\beta) \mathbf{a}^\beta du^\alpha + (\mathbf{a}_3 \cdot \delta \mathbf{a}_\alpha) \mathbf{a}_3 du^\alpha \\ &= (\delta \varepsilon_{\alpha\beta} + \delta \omega_{\alpha\beta}) \mathbf{a}^\beta du^\alpha - \delta \theta_\alpha \mathbf{a}_3 du^\alpha \end{aligned} \quad (4.25)$$

Til den sidste omskrivning er benyttet (4.8), (4.13), (4.5) og (4.17) i nævnte rækkefølge, samt definitionen

$$2\delta \omega_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\beta \cdot \delta \mathbf{a}_\alpha - \mathbf{a}_\alpha \cdot \delta \mathbf{a}_\beta \quad (4.26)$$

som udtrykt ved flytninger jf. (4.5) kan skrives

$$\delta \omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta v_{\beta,\alpha} - \delta v_{\alpha,\beta}) \quad (4.27)$$

Det ses at $\delta \omega_{\alpha\beta}$ er skævsymmetrisk, dvs. $\delta \omega_{12} = -\delta \omega_{21}$ og $\delta \omega_{11} = \delta \omega_{22} = 0$. $\delta \omega_{\alpha\beta}$ er skalmidterfladens rotationstensor.

For at bestemme rotationskomponenten $\delta \Omega_3$ om \mathbf{a}_3 , projiceres $d(\delta \mathbf{r})$ på en enhedsvektor vinkelret på $h^\alpha = du^\alpha/ds$. Som nævnt i afsnit 2.3 er en sådan enhedsvektor bestemt ved $\mathbf{t} = e^{\alpha\gamma} h_\alpha \mathbf{a}_\gamma$. Til rotationen er det kun $\delta \omega_{\alpha\beta}$ fra $d(\delta \mathbf{r})$, som giver et bidrag. Dermed bliver

$$\delta \Omega_3 = (\delta \omega_{\alpha\beta} h^\alpha \mathbf{a}^\beta) \cdot (e^{\lambda\mu} h_\lambda \mathbf{a}_\mu) = e^{\lambda\mu} b_\mu^\beta \delta \omega_{\alpha\beta} h^\alpha h_\lambda = e^{\lambda\beta} \delta \omega_{\alpha\beta} h^\alpha h_\lambda \quad (4.28)$$

Udskrives dette resultat, idet $h^\alpha h_\alpha = 1$ benyttes, nås der frem til følgende formel

$$\delta \Omega_3 = e^{12} \delta \omega_{12} \Rightarrow 2\delta \Omega_3 = e^{\alpha\beta} \delta \omega_{\alpha\beta} \quad (4.29)$$

Det fremgår her, at $\delta \Omega_3$ er en invariant, dvs. konstant under en koordinattransformation. Desuden ses det at

$$\delta \Omega_3 = \frac{1}{\sqrt{a}} \delta \omega_{12} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \delta \omega_{21} \Rightarrow \delta \omega_{\alpha\beta} = \delta \Omega_3 e_{\alpha\beta} \quad (4.30)$$

Dermed haves nu rotationsvektorens komponenter i både tangentplanen og i normalens retning dvs. samlet kan skrives

$$\delta\Phi = \delta\Omega + \delta\Omega_3 \mathbf{a}_3 \quad (4.31)$$

For at bestemme de afledede af $\delta\Phi$ benyttes, at $\frac{\partial(\delta\Phi)}{\partial u^\beta}$ jf. formel (2.57) kan skrives

$$\frac{\partial(\delta\Phi)}{\partial u^\beta} = \left(\frac{\partial(\delta\Phi)}{\partial u^\beta} \cdot \mathbf{a}^\mu \right) \mathbf{a}^\mu + \left(\frac{\partial(\delta\Phi)}{\partial u^\beta} \cdot \mathbf{a}_3 \right) \mathbf{a}_3 \quad (4.32)$$

Vha. (2.65), (4.23) og (4.29) kan komposanterne i tangentplanen skrives

$$\frac{\partial(\delta\Phi)}{\partial u^\beta} \cdot \mathbf{a}^\mu = e^{\alpha\mu} \delta\theta_{\alpha\beta} - \delta\Omega_3 b_\beta^\mu = e^{\alpha\mu} (\delta\theta_{\alpha\beta} - b_\beta^\gamma \delta\omega_{\alpha\gamma}) = e^{\alpha\mu} \delta k_{\beta\alpha} \quad (4.33)$$

hvor

$$\delta k_{\alpha\beta} = \delta\theta_{\beta,\alpha} - b_\alpha^\gamma \delta\omega_{\beta\gamma} \quad (4.34)$$

Tensoren $\delta k_{\alpha\beta}$ kaldes bøjningstensoren og dens symmetriske del $\delta\kappa_{\alpha\beta}$ er

$$\delta\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\delta k_{\alpha\beta} + \delta k_{\beta\alpha}) = \frac{1}{2}(\delta\theta_{\alpha,\beta} + \delta\theta_{\beta,\alpha}) - \frac{1}{2}b_\alpha^\gamma \delta\omega_{\beta\gamma} - \frac{1}{2}b_\beta^\gamma \delta\omega_{\alpha\gamma} \quad (4.35)$$

Tensoren $\delta k_{\alpha\beta}$ eller dens symmetriske del $\delta\kappa_{\alpha\beta}$ har den egenskab, at den i videst mulig udstrækning definerer midterfladens bøjning uafhængig af midterfladens længde- og vinkelændring.

Senere vil der også blive brug for de afledede af $\delta\mathbf{a}_\alpha$. Vha. formel (4.5) fås når udtrykket for $\delta\theta_\alpha$ i (4.17) også indsættes

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\delta\mathbf{a}_\alpha)}{\partial u^\beta} &= \frac{\partial(\delta v_{\gamma,\alpha})}{\partial u^\beta} \mathbf{a}^\gamma + \delta v_{\gamma,\alpha} \frac{\partial \mathbf{a}^\gamma}{\partial u^\beta} - \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} \delta w \mathbf{a}^\gamma - b_{\alpha\gamma} \frac{\partial(\delta w)}{\partial u^\beta} \mathbf{a}^\gamma - b_{\alpha\gamma} \delta w \frac{\partial \mathbf{a}^\gamma}{\partial u^\beta} \\ &\quad - \frac{\partial(\delta\theta_\alpha)}{\partial u^\beta} \mathbf{a}_3 - \delta\theta_\alpha \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial u^\beta} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Den kovariante afledede af tensoren $\delta v_{\gamma,\alpha}$ er iflg. (2.74)

$$\delta v_{\gamma,\alpha\beta} = \frac{\partial(\delta v_{\gamma,\alpha})}{\partial u^\beta} - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \gamma \beta \end{matrix} \right\} \delta v_{\mu,\alpha} - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} \delta v_{\gamma,\mu} \quad (4.37)$$

Når de afledede af \mathbf{a}^γ og \mathbf{a}_3 bestemmes vha. hhv. (2.62) og (2.65) bliver slutresultatet

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\delta\mathbf{a}_\alpha)}{\partial u^\beta} &= \left[\delta v_{\lambda,\alpha\beta} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} \delta v_{\lambda,\mu} - \frac{\partial b_{\alpha\lambda}}{\partial u^\beta} \delta w - b_{\alpha\lambda} \frac{\partial(\delta w)}{\partial u^\beta} + b_{\alpha\mu} \delta w \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \beta \gamma \end{matrix} \right\} + \delta\theta_\alpha b_{\lambda\beta} \right] \mathbf{a}^\lambda \\ &\quad - \left[\frac{\partial(\delta\theta_\alpha)}{\partial u^\beta} + b_\beta^\mu (\delta v_{\mu,\alpha} - b_{\alpha\mu} \delta w) \right] \mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Udtrykkes flytninger i stedet for ved de kovariante komponenter fås

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\delta\mathbf{a}_\alpha)}{\partial u^\beta} &= \left[\delta v_{\alpha\beta}^\lambda + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} \delta v_{\mu}^\lambda - \frac{\partial b_\alpha^\lambda}{\partial u^\beta} \delta w - b_\alpha^\lambda \frac{\partial(\delta w)}{\partial u^\beta} - b_\alpha^\mu \delta w \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu \beta \end{matrix} \right\} + \delta\theta_\alpha b_\beta^\lambda \right] \mathbf{a}_\lambda \\ &\quad - \left[\frac{\partial(\delta\theta_\alpha)}{\partial u^\beta} + b_{\mu\beta} (\delta v_{\alpha}^\mu - b_\alpha^\mu \delta w) \right] \mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Endelig bliver der brug for variationen af $(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_\alpha)$ og de afledede af denne variation

$$\delta(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_\alpha) = \delta\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_\alpha + \mathbf{a}_3 \times \delta\mathbf{a}_\alpha \quad (4.40)$$

Indsættes de udledte udtryk for $\delta\mathbf{a}_\alpha$ og $\delta\mathbf{a}_3$ fra hhv. (4.5) og (4.16) fås

$$\delta(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_\alpha) = e^{\gamma\lambda}(\delta v_{\gamma,\alpha} - b_{\alpha\gamma}\delta w)\mathbf{a}_\lambda + e_{\lambda\alpha}\delta\theta^\lambda\mathbf{a}_3 \quad (4.41)$$

For de afledede haves fra (4.40)

$$\frac{\partial}{\partial u^\beta}[\delta(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_\alpha)] = \frac{\partial(\delta\mathbf{a}_3)}{\partial u^\beta} \times \mathbf{a}_\alpha + \delta\mathbf{a}_3 \times \frac{\partial\mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\beta} + \frac{\partial\mathbf{a}_3}{\partial u^\beta} \times \delta\mathbf{a}_\alpha + \mathbf{a}_3 \times \frac{\partial(\delta\mathbf{a}_\alpha)}{\partial u^\beta} \quad (4.42)$$

Indsættes de udledte udtryk for de forskellige størrelser fås følgende

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^\beta}[\delta(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_\alpha)] = & e_{\alpha\rho}b_{\lambda\beta}\delta\theta^\lambda\mathbf{a}^\rho - e_{\lambda\rho}b_{\alpha\beta}\delta\theta^\lambda\mathbf{a}^\rho \\ & + e^{\lambda\rho}\left[\delta v_{\lambda,\alpha\beta} + \left\{\begin{matrix} \mu \\ \alpha \beta \end{matrix}\right\}\delta v_{\lambda,\mu} - \frac{\partial b_{\alpha\lambda}}{\partial u^\beta}\delta w - b_{\alpha\lambda}\frac{\partial(\delta w)}{\partial u^\beta} + b_{\alpha\mu}\delta w\left\{\begin{matrix} \mu \\ \beta \gamma \end{matrix}\right\} + \delta\theta_\alpha b_{\lambda\beta}\right]\mathbf{a}_\rho \\ & + \left[e_{\lambda\alpha}\delta\theta_{,\beta}^\lambda + e_{\lambda\mu}\left\{\begin{matrix} \mu \\ \alpha \beta \end{matrix}\right\}\delta\theta^\lambda - e^{\lambda\rho}b_{\lambda\beta}(\delta v_{\rho,\alpha} - b_{\alpha\rho}\delta w)\right]\mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (4.43)$$

Udtrykkes flytninger i stedet for ved de kovariante komponenter fås

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^\beta}[\delta(\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_\alpha)] = & e_{\alpha\rho}b_{\lambda\beta}\delta\theta^\lambda\mathbf{a}^\rho - e_{\lambda\rho}b_{\alpha\beta}\delta\theta^\lambda\mathbf{a}^\rho \\ & + e_{\lambda\rho}\left[\delta v_{\lambda,\alpha\beta}^\lambda + \left\{\begin{matrix} \mu \\ \alpha \beta \end{matrix}\right\}\delta v_{\lambda,\mu}^\lambda - \frac{\partial b_{\alpha\lambda}^\lambda}{\partial u^\beta}\delta w - b_{\alpha\lambda}^\lambda\frac{\partial(\delta w)}{\partial u^\beta} - b_{\alpha\mu}^\mu\delta w\left\{\begin{matrix} \lambda \\ \mu \beta \end{matrix}\right\}\right]\mathbf{a}^\rho \\ & + \left[e_{\lambda\alpha}\delta\theta_{,\beta}^\lambda + e_{\lambda\mu}\left\{\begin{matrix} \mu \\ \alpha \beta \end{matrix}\right\}\delta\theta^\lambda - e_{\lambda\rho}b_{\beta}^\lambda(\delta v_{\rho,\alpha}^\rho - b_{\alpha\rho}^\rho\delta w)\right]\mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (4.44)$$

4.2 Variation af ligevægtsligningerne

Før ligevægtsligninger for en nærliggende tilstand bestemmes, vil de transformerede belastninger og transformerede snitkræfter blive defineret. De transformerede størrelser refererer til en referencetilstand, som fx kan være en udeformeret tilstand eller en tilstand, hvis stabilitet ønskes undersøgt. I det følgende vil * blive benyttet som betegnelse for transformerede størrelser og 0 som indeks for størrelser i referencetilstanden.

Fordelen ved i det følgende at arbejde med transformerede størrelser er naturligvis, at disse kan refereres til konstante størrelser, hvorved visse variationer af længder og arealer undgås.

4.2.1 Transformerede belastninger og snitkræfter

Størrelsen \sqrt{a} er, som omtalt i afsnit 2.1, bestemmende for arealet af skalmidterfladen, idet $\sqrt{a} du^1 du^2$ er arealelementet svarende til koordinattilvæksterne du^1 og du^2 . Arealelementet i referencetilstanden benævnes $\sqrt{a_0} du^1 du^2$.

Den transformerede belastning \mathbf{p}_* defineres som belastningen målt pr. arealenhed i referencetilstanden. Dermed er den transformerede belastning bestemt ud fra belastningen i den deformerede tilstand og forholdet mellem arealelementet i den deformerede tilstand og arealelementet i referencetilstanden

$$\mathbf{p}_* = \mathbf{p} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_0}} \quad (4.45)$$

Snitkræfterne transformeres på samme måde, dvs.

$$N_*^{\alpha\beta} = N^{\alpha\beta} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_0}} \quad Q_*^\alpha = Q^\alpha \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_0}} \quad M_*^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_0}} \quad (4.46)$$

De transformerede snitkræfter er analoge til Piola-Kirchhoffs spændingstensor i den tredimensionale teori, se fx (Nielsen, 1976).

4.2.2 Indre ligevægtsligninger for nærliggende ligevægtstilstande

Indføres de transformerede størrelser i ligevægtsligningerne (3.23) og (3.24) fås

$$\frac{\partial N_*^{\gamma\alpha} \sqrt{a_0} \mathbf{a}_\alpha}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial Q_*^\gamma \sqrt{a_0} \mathbf{a}_3}{\partial u^\gamma} + \mathbf{p}_* \sqrt{a_0} = \mathbf{0} \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial (M_*^{\gamma\alpha} \sqrt{a_0} (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_\alpha))}{\partial u^\gamma} + \mathbf{a}_\gamma \times [N_*^{\gamma\alpha} \sqrt{a_0} \mathbf{a}_\alpha + Q_*^\gamma \sqrt{a_0} \mathbf{a}_3] = \mathbf{0} \quad (4.48)$$

Det ses, at ligevægtsligningerne på tensorform (3.32) og (3.33) også gælder i referencetilstanden, når blot alle størrelser erstattes med de transformerede størrelser.

$$S_*^{\gamma\alpha} - b_\gamma^\alpha M_{*,\lambda}^{\lambda\gamma} + \frac{1}{2} (M_*^{\lambda\alpha} b_\lambda^\gamma - M_*^{\lambda\gamma} b_\lambda^\alpha)_{,\gamma} + p_*^\alpha = 0 \quad (4.49)$$

$$S_*^{\gamma\alpha} b_{\gamma\alpha} + M_{*,\lambda\gamma}^{\lambda\gamma} + p_*^3 = 0 \quad (4.50)$$

Ligesom i formel (3.29) er her indført

$$N_*^{\alpha\beta} = S_*^{\alpha\beta} + F_*^{\alpha\beta} \quad (4.51)$$

hvor den symmetriske del er givet ved

$$S_*^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (N_*^{\alpha\beta} + N_*^{\beta\alpha}) \quad (4.52)$$

og den asymmetriske del ved

$$F_*^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (N_*^{\alpha\beta} - N_*^{\beta\alpha}) \quad (4.53)$$

Når $S_*^{\alpha\beta}$ og $M_*^{\alpha\beta}$ er bestemt af (4.47) (4.48), findes "reaktionerne"

$$F_*^{\gamma\alpha} = \frac{1}{2}M_*^{\lambda\alpha}b_{\lambda}^{\gamma} - \frac{1}{2}M_*^{\lambda\gamma}b_{\lambda}^{\alpha} \quad (4.54)$$

$$Q_*^{\alpha} = M_*^{\gamma\alpha}_{,\gamma} \quad (4.55)$$

Det ønskes nu at bestemme ligevægtsligninger i en til referencetilstanden nærliggende ligevægtstilstand. Dette gøres, som beskrevet ovenfor, ved at udsætte en ligevægtstilstand, i dette tilfælde referencetilstanden, for en variation δr af stedvektoren.

Det antages, at vha. de konstitutive ligninger kan variationen af snitkræfterne beregnes. Dette vil blive behandlet nærmere i afsnit 6.

Der gøres den vigtige forudsætning, at belastningsvektoren bevarer sin retning og størrelse, dvs. $\delta p_* = 0$. Dette vil fx være tilfældet for en død vægtsbelastning.

Variationen af (4.47) giver hermed

$$\frac{\partial}{\partial u^{\gamma}} [\delta N_*^{\gamma\alpha} \sqrt{a_0} a_{\alpha} + N_*^{\gamma\alpha} \sqrt{a_0} \delta a_{\alpha} + \delta Q_*^{\gamma} \sqrt{a_0} a_3 + Q_*^{\gamma} \sqrt{a_0} \delta a_3] = 0 \quad (4.56)$$

Indføres de varierede og afledede størrelser samt udnyttes ligevægtsligningen (4.47) på tensorform, svarende til (3.25) og (3.26), fås efter nogen regning, at (4.56) er ækvivalent med følgende tre skalære ligninger

$$(\delta N_*^{\gamma\alpha})_{,\gamma} + (-p_*^{\lambda} + b_{\gamma}^{\lambda} Q_*^{\gamma}) \delta I_{\alpha\lambda}^{\alpha} + N_*^{\gamma\alpha} \delta I_{\alpha\lambda,\gamma}^{\alpha} - b_{\lambda}^{\alpha} \delta Q_*^{\gamma} - p_*^3 \delta \theta^{\alpha} + Q_*^{\gamma} \delta \theta_{,\gamma}^{\alpha} = 0 \quad (4.57)$$

($\alpha = 1, 2$)

$$b_{\alpha\gamma} \delta N_*^{\gamma\alpha} + (\delta Q_*^{\gamma})_{,\gamma} + p_*^{\alpha} \delta \theta_{\alpha} + N_*^{\gamma\alpha} \delta b_{\alpha\gamma} = 0 \quad (4.58)$$

hvor (4.57) er faktoren til a_{α} og (4.58) er faktoren til a_3 .

I ligningerne er følgende betegnelser indført

$$\begin{aligned} \delta I_{\alpha\lambda}^{\alpha} &= \delta v_{\alpha,\lambda} - b_{\lambda\alpha} \delta w \\ \delta I_{\alpha\lambda}^{\alpha} &= \delta v_{\lambda}^{\alpha} - b_{\lambda}^{\alpha} \delta w \\ \delta I_{\alpha\lambda,\gamma}^{\alpha} &= \delta v_{\lambda,\gamma}^{\alpha} - (b_{\lambda}^{\alpha} \delta w)_{,\gamma} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Her indgår kovariante afledede, fx

$$(b_{\lambda}^{\alpha} \delta w)_{,\gamma} = \frac{\partial (b_{\lambda}^{\alpha} \delta w)}{\partial u^{\gamma}} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu \gamma \end{matrix} \right\} b_{\alpha}^{\mu} \delta w - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha \gamma \end{matrix} \right\} b_{\mu}^{\lambda} \delta w \quad (4.60)$$

Variation af (4.48) giver

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^\gamma} [\delta M_*^{\gamma\alpha} \sqrt{a_0} (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_\alpha) + N_*^{\gamma\alpha} \sqrt{a_0} \delta (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_\alpha)] + \delta \mathbf{a}_\gamma \times [N_*^{\gamma\alpha} \sqrt{a_0} \mathbf{a}_\alpha + Q_*^\gamma \sqrt{a_0} \mathbf{a}_3] \\ + \mathbf{a}_\gamma \times [\delta N_*^{\gamma\alpha} \sqrt{a_0} \mathbf{a}_\alpha + N_*^{\gamma\alpha} \sqrt{a_0} \delta \mathbf{a}_\alpha + \delta Q_*^\gamma \sqrt{a_0} \mathbf{a}_3 + Q_*^\gamma \sqrt{a_0} \delta \mathbf{a}_3] = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Foruden de tidligere udledte udtryk for forskellige størrelser bliver der i det følgende også brug for

$$\delta \mathbf{a}_\gamma \times \mathbf{a}_\alpha = -e_{\alpha\rho} \delta\theta_\gamma \alpha^\rho + e_{\lambda\alpha} (\delta v_{,\gamma}^\lambda - b_\gamma^\lambda \delta w) \mathbf{a}_3 \quad (4.62)$$

$$\mathbf{a}_\gamma \times \delta \mathbf{a}_\alpha = e_{\gamma\rho} \delta\theta_\alpha \alpha^\rho + e_{\gamma\lambda} (\delta v_{,\alpha}^\lambda - b_\alpha^\lambda \delta w) \mathbf{a}_3 \quad (4.63)$$

$$\delta \mathbf{a}_\gamma \times \mathbf{a}_3 = -e_{\lambda\rho} (\delta v_{,\gamma}^\lambda - b_\gamma^\lambda \delta w) \alpha^\rho \quad (4.64)$$

$$\mathbf{a}_\gamma \times \delta \mathbf{a}_3 = e_{\gamma\lambda} \delta\theta^\lambda \mathbf{a}_3 \quad (4.65)$$

Med disse udtryk til rådighed fås, når ligevægtsligningen (4.48) på tensorform svarende til (3.27) og (3.28) udnyttes, at (4.61) ækvivalent med følgende tre skalære ligninger

$$(\delta M_*^{\gamma\alpha})_{,\gamma} - \delta Q_*^\alpha - M_*^{\gamma\lambda} b_{\lambda\gamma} \delta\theta^\alpha + M_*^{\lambda\gamma} b_\lambda^\alpha \delta\theta_\gamma + M_*^{\gamma\lambda} \delta I_{\circ\lambda,\gamma}^\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2) \quad (4.66)$$

$$-e_{\gamma\alpha} b_\lambda^\gamma \delta M_*^{\lambda\alpha} + e_{\gamma\alpha} \delta N_*^{\gamma\alpha} - e_{\gamma\alpha} M_*^{\lambda\alpha} \delta b_\lambda^\gamma = 0 \quad (4.67)$$

Her er (4.66) faktoren til α_α og (4.67) er faktoren til \mathbf{a}_3 .

For variationer af snitkræfterne $\delta N_*^{\alpha\beta}$, $\delta S_*^{\alpha\beta}$ og $\delta F_*^{\alpha\beta}$ gælder iht. (4.51) til (4.53)

$$\delta N_*^{\alpha\beta} = \delta S_*^{\alpha\beta} + \delta F_*^{\alpha\beta} \quad (4.68)$$

$$\delta S_*^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta N_*^{\alpha\beta} + \delta N_*^{\beta\alpha}) \quad (4.69)$$

$$\delta F_*^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta N_*^{\alpha\beta} - \delta N_*^{\beta\alpha}) \quad (4.70)$$

Betragtningerne i forbindelse med omskrivning af formel (3.28) til (3.31), gentages her ($\delta F_*^{11} = \delta F_*^{22} = 0$, $\delta F_*^{12} = -\delta F_*^{21}$ og $e_{\gamma\alpha} \delta S_*^{\gamma\alpha} = 0$). Dermed fås følgende formel for δF_*^{12} ud fra (4.67)

$$\delta F_*^{12} = \frac{1}{2} b_\lambda^1 \delta M_*^{\lambda 2} - \frac{1}{2} b_\lambda^2 \delta M_*^{\lambda 1} + \frac{1}{2} M_*^{\lambda 2} \delta b_\lambda^1 - \frac{1}{2} M_*^{\lambda 1} \delta b_\lambda^2 \quad (4.71)$$

Det ses dermed at (4.71) og den tilsvarende formel for δF_*^{21} samlet kan skrives

$$\delta F_*^{\gamma\alpha} = \frac{1}{2} b_\lambda^\gamma \delta M_*^{\lambda\alpha} - \frac{1}{2} b_\lambda^\alpha \delta M_*^{\lambda\gamma} + \frac{1}{2} M_*^{\lambda\alpha} \delta b_\lambda^\gamma - \frac{1}{2} M_*^{\lambda\gamma} \delta b_\lambda^\alpha \quad (4.72)$$

der gælder for alle γ og α .

4.2.3 Ligevægtsligninger for nærliggende ligevægtstilstande

De seks ligninger (4.57), (4.58), (4.66) og (4.67) er de 6 indre ligevægtsligningerne for en nærliggende ligevægtstilstand. Igen skal det nævnes at for teorier, hvor der ikke indgår konstitutive

ligninger for forskydningskræfterne skal δQ_*^γ elimineres af ligevægtsligningerne. Her sker det ved at bestemme δQ_*^γ vha. formel (4.66), som derefter indsættes i (4.57) og (4.58). Samtidigt deles $N_*^{\alpha\beta}$ og $\delta N_*^{\alpha\beta}$ op i en symmetrisk og en asymmetrisk del.

Herved fås

$$\delta Q_*^\alpha = (\delta M_*^{\gamma\alpha})_{,\gamma} - M_*^{\gamma\lambda} b_{\lambda\gamma} \delta\theta^\alpha + M_*^{\lambda\gamma} b_\lambda^\alpha \delta\theta_\gamma + M_*^{\gamma\lambda} \delta I_{\circ\lambda,\gamma}^\alpha \quad (4.73)$$

Ligevægtsligningerne for en nærliggende ligevægtstilstand bliver dermed

$$\begin{aligned} & (\delta S_*^{\gamma\alpha})_{,\gamma} + (\delta F_*^{\gamma\alpha})_{,\gamma} + (-p_*^\lambda + b_\gamma^\lambda Q_*^\gamma) \delta I_{\circ\lambda}^\alpha + S_*^{\gamma\lambda} \delta I_{\circ\lambda,\gamma}^\alpha + F_*^{\gamma\lambda} \delta I_{\circ\lambda,\gamma}^\alpha \\ & - b_\lambda^\alpha \delta Q_*^\gamma - p_*^\gamma \delta\theta^\alpha + Q_*^\gamma \delta\theta_\gamma^\alpha = 0 \end{aligned} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (4.74)$$

$$b_{\alpha\gamma} \delta S_*^{\gamma\alpha} + (\delta Q_*^\gamma)_{,\gamma} + p_*^\alpha \delta\theta_\alpha + (S_*^{\gamma\alpha} + F_*^{\gamma\alpha}) \delta b_{\alpha\gamma} = 0 \quad (4.75)$$

Indsættes størrelserne for $F_*^{\gamma\lambda}$, $\delta F_*^{\gamma\alpha}$ og δQ_*^γ fra hhv. (4.54), (4.72) og (4.73) fås

$$\begin{aligned} & (\delta S_*^{\gamma\alpha})_{,\gamma} + \frac{1}{2} (b_\lambda^\gamma \delta M_*^{\lambda\alpha} - b_\lambda^\alpha \delta M_*^{\lambda\gamma} + M_*^{\lambda\alpha} \delta b_\lambda^\gamma - M_*^{\lambda\gamma} \delta b_\lambda^\alpha)_{,\gamma} \\ & + (-p_*^\lambda + b_\gamma^\lambda Q_*^\gamma) \delta I_{\circ\lambda}^\alpha + S_*^{\gamma\lambda} \delta I_{\circ\lambda,\gamma}^\alpha + \frac{1}{2} (M_*^{\rho\lambda} b_\rho^\gamma - M_*^{\rho\gamma} b_\rho^\lambda) \delta I_{\circ\lambda,\gamma}^\alpha \\ & - b_\lambda^\alpha \left[(\delta M_*^{\rho\gamma})_{,\rho} - M_*^{\rho\lambda} b_{\lambda\rho} \delta\theta^\gamma + M_*^{\lambda\rho} b_\lambda^\gamma \delta\theta_\rho + M_*^{\rho\lambda} \delta I_{\circ\lambda,\rho}^\gamma \right] \\ & - p_*^\gamma \delta\theta^\alpha + Q_*^\gamma \delta\theta_\gamma^\alpha = 0 \end{aligned} \quad (\alpha = 1, 2) \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} & b_{\alpha\gamma} \delta S_*^{\gamma\alpha} + \left[(\delta M_*^{\rho\gamma})_{,\rho} - M_*^{\rho\lambda} b_{\lambda\rho} \delta\theta^\gamma + M_*^{\lambda\rho} b_\lambda^\gamma \delta\theta_\rho + M_*^{\rho\lambda} \delta I_{\circ\lambda,\rho}^\gamma \right]_{,\gamma} + p_*^\alpha \delta\theta_\alpha \\ & + \left[S_*^{\gamma\alpha} + \frac{1}{2} (M_*^{\lambda\alpha} b_\lambda^\gamma - M_*^{\lambda\gamma} b_\lambda^\alpha) \right] \delta b_{\alpha\gamma} = 0 \end{aligned} \quad (4.77)$$

Det ses at formlerne er meget komplicerede, og de vil formentlig sjældent blive brugt i den fulde udstrækning.

Disse tre koblede ligninger er de nødvendige ligninger til at bestemme flytningerne δv_α og δw , idet variationerne af snitkræfterne $\delta S_*^{\alpha\beta}$ og $\delta M_*^{\alpha\beta}$ bestemmes vha. de konstitutive ligninger, se afsnit 6.

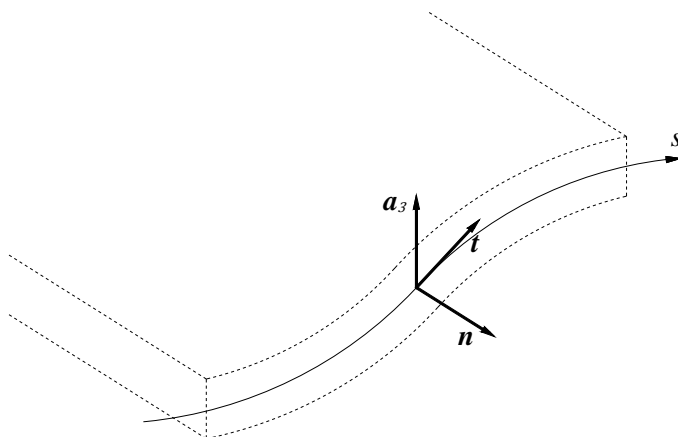
Når flytningerne er bestemt kan $\delta F_*^{\gamma\alpha}$ og δQ_*^α bestemmes vha. hhv. formel (4.72) og (4.73).

5 Randbetingelser for nærliggende ligevægtstilstande

I dette afsnit vil de statiske randbetingelser blive bestemt for nærliggende ligevægtstilstande. Det skal vise sig, at randbetingelserne for normalkræfter bestemmes let, idet krav om fuld overensstemmelse mellem indre og ydre kræfter blot kan opfyldes. For momenter er sagen en anden og et arbejdsprincip må benyttes.

Til bestemmelse af randbetingelserne for en nærliggende ligevægtstilstand indføres i ethvert randpunkt et lokalt retvinklet (n, t) -koordinatsystem. Enhedsvektorerne for hhv. n - og t -aksen betegnes \mathbf{n} og \mathbf{t} . Koordinatsystemet placeres således, at \mathbf{n} er en udadrettet normal til randen, og det forudsættes at \mathbf{n} , \mathbf{t} og \mathbf{a}_3 er i højrestilling.

Buelængden langs randen betegnes s og regnes positiv i t -aksen retning. Forholdene er vist i Figur 5.1.



Figur 5.1 – Lokalt koordinatsystem langs en rand

I afsnit 2.3 blev betegnelserne \mathbf{h} , \mathbf{t} og \mathbf{a}_3 brugt for tre vektorer i højrestilling og s til at betegne buelængden af en vilkårlig kurve med enhedstangentvektoren \mathbf{h} .

5.1 Randkraft

Kraften $N_{(n)}$ på randen er iht. formel (3.12) bestemt ved

$$N_{(n)} = N^{\alpha\beta} n_{\alpha} \mathbf{a}_{\beta} + Q^{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{a}_3 \quad (5.1)$$

hvor n_{α} er de kovariante komponenter af den udadrettede enhedsvektor \mathbf{n} .

På randen indføres en transformeret randkraft $N_{(n)}^*$ bestemt ved

$$N_{(n)}^* = N_{(n)} \frac{ds}{ds_0} \quad (5.2)$$

Her er ds buelængden langs randen og ds_0 er den tilsvarende værdi i referencetilstanden. Dermed bliver den transformerede randkraft også målt pr. længdeenhed i referencetilstanden. Den transformerede randkraft kan, når også de transformerede snitkræfter jf. (4.46) indføres, skrives

$$\mathbf{N}_{(n)}^* = N_*^{\alpha\beta} \frac{ds}{ds_0} \frac{\sqrt{a_0}}{\sqrt{a}} n_\alpha \mathbf{a}_\beta + Q_*^\alpha \frac{ds}{ds_0} \frac{\sqrt{a_0}}{\sqrt{a}} n_\alpha \mathbf{a}_3 \quad (5.3)$$

For at kunne formulere randbetingelserne må variationen af de kovariante komponenter af enhedsvektoren δn_α bestemmes. Randens ligning i u^1, u^2 -koordinater antages at være beskrevet ved

$$f(u^1, u^2) = 0 \quad (5.4)$$

Dette er randens ligning for enhver konfiguration af den betragtede skalkonstruktion.

Langs randen er $df = 0$, dvs.

$$df = \frac{\partial f}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial f}{\partial u^2} du^2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} du^\alpha = 0 \quad (5.5)$$

Da du^α her er en vektor langs randkurven, altså en vektor i t -aksens retning ($\frac{du^\alpha}{ds} = t^\alpha$ er en enhedsvektor), ses at $\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}$ er proportional med de kovariante komponenter af enhedsnormalen \mathbf{n} , altså

$$n_\alpha = \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} \quad (5.6)$$

hvor c er en proportionalitetsfaktor. Den beregnes ved, at udnytte at n_α er en enhedsvektor, dvs. $n^\alpha n_\alpha = a^{\alpha\beta} n_\beta n_\alpha = 1$, og dermed

$$c^2 = a^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} \frac{\partial f}{\partial u^\beta} \quad (5.7)$$

Af (5.6) fås

$$\delta n_\alpha = -\frac{1}{c^2} \delta c \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} = -\frac{\delta c}{c} n_\alpha \quad (5.8)$$

og af (5.7) findes

$$2c \delta c = \delta a^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} \frac{\partial f}{\partial u^\beta} \quad (5.9)$$

For at bestemme variationen $\delta a^{\alpha\beta}$ benyttes betingelsen fra (2.22), nemlig at $a^{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma} = \delta_\gamma^\beta$. Herved fås

$$\delta(\delta_\gamma^\beta) = \delta a^{\alpha\beta} a_{\alpha\gamma} + a^{\alpha\beta} \delta a_{\alpha\gamma} = 0 \quad (5.10)$$

Multipliseres med $a^{\rho\gamma}$ fås

$$a^{\rho\gamma} a_{\alpha\gamma} \delta a^{\alpha\beta} + a^{\rho\gamma} a^{\alpha\beta} \delta a_{\alpha\gamma} = 0 \quad (5.11)$$

Da $a^{\rho\gamma} a_{\alpha\gamma} = \delta_{\alpha}^{\rho}$ kan der omskrives til

$$\delta a^{\rho\beta} = -a^{\rho\gamma} a^{\alpha\beta} \delta a_{\alpha\gamma} \quad (5.12)$$

Indsættes $\delta a_{\alpha\gamma} = 2\delta\varepsilon_{\alpha\gamma}$ fra formel (4.13) haves, at variationen af den metriske tensor kan skrives

$$\delta a^{\rho\beta} = -2\delta\varepsilon^{\rho\beta} \quad (5.13)$$

Herved bliver iflg. (5.7) og (5.9)

$$\frac{\delta c}{c} = -\delta\varepsilon^{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \quad (5.14)$$

Variationen af de kovariante komponenter n_{γ} kan ved indsættelse i (5.8) skrives

$$\delta n_{\gamma} = \delta\varepsilon^{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} n_{\gamma} = \delta\varepsilon_{\alpha\beta} n^{\alpha} n^{\beta} n_{\gamma} \quad (5.15)$$

Da det iht. (4.12) gælder, at $\delta\varepsilon_{\alpha\beta} n^{\alpha} n^{\beta}$ er længdetøjningen, her i n -aksens retning, $\delta\varepsilon_{(n)}$, fås endelig

$$\delta n_{\gamma} = \delta\varepsilon_{(n)} n_{\gamma} \quad (5.16)$$

Den første variation af $\mathbf{N}_{(n)}^*$ fra (5.3) bliver dermed

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{N}_{(n)}^* &= \delta N_{*}^{\alpha\beta} \frac{ds}{ds_0} \frac{\sqrt{a_0}}{\sqrt{a}} n_{\alpha} \mathbf{a}_{\beta} + N_{*}^{\alpha\beta} \left(\frac{\delta(ds)}{ds_0} \frac{\sqrt{a_0}}{\sqrt{a}} n_{\alpha} + \frac{ds}{ds_0} \sqrt{a_0} \delta \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right) n_{\alpha} + \frac{ds}{ds_0} \frac{\sqrt{a_0}}{\sqrt{a}} \delta n_{\alpha} \right) \mathbf{a}_{\beta} \\ &\quad + N_{*}^{\alpha\beta} \frac{ds}{ds_0} \frac{\sqrt{a_0}}{\sqrt{a}} n_{\alpha} \delta \mathbf{a}_{\beta} \\ &\quad + \delta Q_{*}^{\alpha} \frac{ds}{ds_0} \frac{\sqrt{a_0}}{\sqrt{a}} n_{\alpha} \mathbf{a}_3 + Q_{*}^{\alpha} \left(\frac{\delta(ds)}{ds_0} \frac{\sqrt{a_0}}{\sqrt{a}} n_{\alpha} + \frac{ds}{ds_0} \sqrt{a_0} \delta \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right) n_{\alpha} + \frac{ds}{ds_0} \frac{\sqrt{a_0}}{\sqrt{a}} \delta n_{\alpha} \right) \mathbf{a}_3 \\ &\quad + Q_{*}^{\alpha} \frac{ds}{ds_0} \frac{\sqrt{a_0}}{\sqrt{a}} n_{\alpha} \delta \mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (5.17)$$

På randen er

$$\frac{\delta(ds)}{ds} = \delta\varepsilon_{(t)} \quad (5.18)$$

hvor $\delta\varepsilon_{(t)}$ er længdetøjningen i t -aksens retning. Benyttes, idet der er tale om små størrelser, at den relative arealændring tilnærmelsesvis er summen af længdetøjningerne i to på hinanden vinkelrette retningen, er

$$\delta \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right) = -\frac{1}{a} \delta \sqrt{a} = -\frac{1}{\sqrt{a}} (\delta\varepsilon_{(t)} + \delta\varepsilon_{(n)}) \quad (5.19)$$

Når (5.17) opskrives i referencetilstanden, fås med $\delta \mathbf{a}_\beta$ og $\delta \mathbf{a}_3$ udtrykt ved hhv. formel (4.5) og (4.16)

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{N}_{(n)}^* &= \delta N_*^{\alpha\beta} n_\alpha \mathbf{a}_\beta + N_*^{\alpha\beta} [\delta \varepsilon_{(t)} - (\delta \varepsilon_{(t)} + \delta \varepsilon_{(n)}) + \delta \varepsilon_{(n)}] n_\alpha \mathbf{a}_\beta \\ &\quad + N_*^{\alpha\beta} n_\alpha (\delta I_{\circ\beta}^\gamma \mathbf{a}_\gamma - \delta \theta_\beta \mathbf{a}_3) \\ &\quad + \delta Q_*^\alpha n_\alpha \mathbf{a}_3 + Q_*^\alpha [\delta \varepsilon_{(t)} - (\delta \varepsilon_{(t)} + \delta \varepsilon_{(n)}) + \delta \varepsilon_{(n)}] n_\alpha \mathbf{a}_3 + Q_*^\alpha n_\alpha \delta \theta^\beta \mathbf{a}_\beta \end{aligned} \quad (5.20)$$

Det ses at længdetøjningerne udgår og at

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{N}_{(n)}^* &= (\delta N_*^{\alpha\beta} + N_*^{\alpha\gamma} \delta I_{\circ\gamma}^\beta + Q_*^\alpha \delta \theta^\beta) n_\alpha \mathbf{a}_\beta + (\delta Q_*^\alpha - N_*^{\alpha\beta} \delta \theta_\beta) n_\alpha \mathbf{a}_3 \\ &= \delta C^{\alpha\beta} n_\alpha \mathbf{a}_\beta + \delta V^\alpha n_\alpha \mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (5.21)$$

når følgende betegnelser for $\delta C^{\alpha\beta}$ og δV^α er indført

$$\delta C^{\alpha\beta} = \delta N_*^{\alpha\beta} + N_*^{\alpha\rho} \delta I_{\circ\rho}^\beta + Q_*^\alpha \delta \theta^\beta = \delta S_*^{\alpha\beta} + \delta F_*^{\alpha\beta} + N_*^{\alpha\rho} \delta I_{\circ\rho}^\beta + Q_*^\alpha \delta \theta^\beta \quad (5.22)$$

$$\delta V^\alpha = \delta Q_*^\alpha - N_*^{\alpha\beta} \delta \theta_\beta \quad (5.23)$$

Haves fx en dødvægtsbelastning hvor $\delta \mathbf{N}_{(n)}^* = \mathbf{0}$, fås følgende skalære betingelser

$$\delta C^{\alpha\beta} n_\alpha = 0 \quad (\beta = 1, 2) \quad (5.24)$$

$$\delta V^\alpha n_\alpha = 0 \quad (5.25)$$

Disse ligninger må imidlertid modificeres i teorier, hvor der ikke haves konstitutive ligninger for forskydningskræfterne.

5.2 Randmoment

Før de nødvendige modifikationer behandles ses der på de betingelser, der fremkommer ved en variation af randmomentet.

Jf. formel (3.18) haves følgende moment på randen

$$\mathbf{M}_{(n)} = M^{\alpha\beta} n_\alpha (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_\beta) \quad (5.26)$$

Analogt med (5.2) defineres det transformerende randmoment $\mathbf{M}_{(n)}^*$ ved

$$\mathbf{M}_{(n)}^* = \mathbf{M}_{(n)} \frac{ds}{ds_0} \quad (5.27)$$

Indføres igen de transformerende snitkræfter fra (4.46) fås i analogi med (5.3)

$$\mathbf{M}_{(n)}^* = M_*^{\alpha\beta} \frac{ds}{ds_0} \frac{\sqrt{a_0}}{\sqrt{a}} n_\alpha (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_\beta) \quad (5.28)$$

Variation af $\mathbf{M}_{(n)}^*$ giver

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{M}_{(n)}^* &= \delta M_*^{\alpha\beta} \frac{ds}{ds_0} \frac{\sqrt{a_0}}{\sqrt{a}} n_\alpha (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_\beta) \\ &+ M_*^{\alpha\beta} \left(\frac{\delta ds}{ds_0} \frac{\sqrt{a_0}}{\sqrt{a}} n_\alpha + \frac{ds}{ds_0} \sqrt{a_0} \delta \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right) n_\alpha + \frac{ds}{ds_0} \frac{\sqrt{a_0}}{\sqrt{a}} \delta n_\alpha \right) (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_\beta) \\ &+ M_*^{\alpha\beta} \frac{ds}{ds_0} \frac{\sqrt{a_0}}{\sqrt{a}} n_\alpha \delta (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_\beta)\end{aligned}\quad (5.29)$$

Fortsættes som ved beregning af $\delta \mathbf{N}_{(n)}^*$ og benyttes formel (4.41) for variationen af $\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_\beta$ fås i referencetilstanden, hvor det igen ses at længdetøjningerne udgår

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{M}_{(n)}^* &= \delta M_*^{\alpha\beta} n_\alpha e_{\beta\gamma} \mathbf{a}^\gamma + M_*^{\alpha\beta} [\delta \varepsilon_{(t)} - (\delta \varepsilon_{(t)} + \delta \varepsilon_{(n)}) + \delta \varepsilon_{(n)}] n_\alpha e_{\beta\gamma} \mathbf{a}^\gamma \\ &+ M_*^{\alpha\beta} n_\alpha (\delta I_{\gamma\beta} e^{\gamma\lambda} \mathbf{a}_\gamma + \delta \theta^\lambda e_{\lambda\beta} \mathbf{a}_3) \\ &= e_{\gamma\lambda} \delta M_*^{\alpha\gamma} n_\alpha \mathbf{a}^\lambda + e_{\gamma\lambda} M_*^{\alpha\beta} n_\alpha \delta I_{\beta}^\gamma \mathbf{a}^\lambda + e_{\lambda\beta} M_*^{\alpha\beta} n_\alpha \delta \theta^\lambda \mathbf{a}_3 \\ &= e_{\gamma\lambda} (\delta M_*^{\alpha\gamma} + M_*^{\alpha\beta} \delta I_{\beta}^\gamma) n_\alpha \mathbf{a}^\lambda + e_{\lambda\beta} \delta \theta^\lambda M_*^{\alpha\beta} n_\alpha \mathbf{a}_3 \\ &= e_{\beta\lambda} \delta B^{\alpha\beta} n_\alpha \mathbf{a}^\lambda + e_{\lambda\beta} \delta \theta^\lambda M_*^{\alpha\beta} n_\alpha \mathbf{a}_3\end{aligned}\quad (5.30)$$

når følgende størrelse er indført

$$\delta B^{\alpha\beta} = \delta M_*^{\alpha\beta} + M_*^{\alpha\rho} \delta I_{\rho}^\beta \quad (5.31)$$

Det bemærkes, at $\delta \mathbf{M}_{(n)}^*$, i modsætning til $\mathbf{M}_{(n)}$, har en komponent langs fladenormalen \mathbf{a}_3 .

Denne komponent optræder netop, fordi det er forudsat, jf. afsnit 3.1, at momentkomponenten i enhver konfiguration af skallen er nul i normalens retning.

Både for teorier med og uden konstitutive ligninger for forskydningskræfterne må der, pga. komponenten i \mathbf{a}_3 -retningen, formuleres randbetingelser vha. et arbejdsprincip i stedet for et krav på randen om fuld overensstemmelse mellem indre og ydre kræfter.

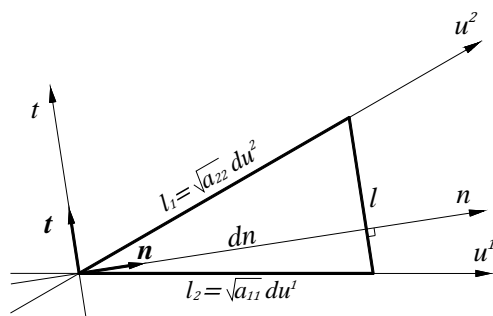
Kræves fuld overensstemmelse mellem momentkomponenterne på randen fra de indre kræfter og de ydre momentkomponenter viser det sig, at der ikke generelt vil være en løsning til et skalproblem. Hvis der kun kræves statisk ækvivalens, i stedet for fuld ækvivalens mellem indre og ydre momentkomponenter, kan der formuleres en brugbar randbetingelse.

Den statiske ækvivalens kan udtrykkes ved at udregne det arbejde $\mathbf{M}_{(n)}^*$ udfører langs skalranden ved en deformation og derefter omskrive udtrykket for dette arbejde. For et lineærelastisk materiale kan det herefter vises, at en entydig løsning fås, hvilket indebærer, at der ikke altid er en løsning, når der kræves fuld overensstemmelse mellem indre og ydre kræfter. Denne idé

skyldes Kirchhoff og de randbetingelser, der findes på denne måde, kaldes derfor Kirchhoffs randbetingelser. Udlledelsen kan ses i (Nielsen, 2004), afsnit 7².

For at bestemme randarbejdet er det nødvendigt at udbygge formelapparatet yderligere.

Betragt igen randkoordinatsystemet, dvs. n, t -systemet. Her må det beskrives hvordan n og t ændrer sig med du^1 og du^2 , altså $\frac{\partial n}{\partial u^\alpha}$ og $\frac{\partial t}{\partial u^\alpha}$. I Figur 5.2 er sammenhængen mellem dn , du^1 og du^2 vist. Det ses at en dn -tilvækst svarer til en du^1 -tilvækst, der kan bestemmes geometrisk ved at indlægge en normal til dn i endepunktet, altså en linje parallel med t -aksen, og lade den skære u^1 -aksen.



Figur 5.2 – Infinitesimal trekant som viser sammenhængen mellem dn , du^1 og du^2

Iflg. formel (3.5) er, idet $dn \cdot l = \sqrt{a} du^1 du^2$ (arealelementet svarende til tilvæksterne du^1 og du^2)

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{a^{11}}} \frac{l_1}{l} = \frac{1}{\sqrt{a^{11}}} \frac{\sqrt{a_{22}} du^2}{l} = \frac{\sqrt{a_{22}}}{\sqrt{a^{11}} \sqrt{a}} \frac{dn}{du^1} = \frac{dn}{du^1} \quad (5.32)$$

$$n_2 = \frac{1}{\sqrt{a^{22}}} \frac{l_2}{l} = \frac{1}{\sqrt{a^{22}}} \frac{\sqrt{a_{11}} du^1}{l} = \frac{\sqrt{a_{11}}}{\sqrt{a^{22}} \sqrt{a}} \frac{dn}{du^2} = \frac{dn}{du^2} \quad (5.33)$$

dvs.

$$\frac{dn}{du^1} = n_1 \quad \frac{dn}{du^2} = n_2 \quad (5.34)$$

Altså

$$\frac{\partial n}{\partial u^\alpha} = n_\alpha \quad (5.35)$$

² I (Nielsen, 2004), formel (7.12), mangler et led på venstre side. Formel (7.12) skal være

$$\tilde{N}_{(nn)} - \frac{\tilde{M}_{(nt)}}{R_{nt}} = S_{(nn)} - \frac{M_{(nt)}}{R_{nt}}$$

Vinkelret på n -aksen haves t -aksen. Da (5.35) gælder for en vilkårlig akseretning og da $t_\alpha = e_{\lambda\alpha} n^\lambda$ gælder, jf. (2.51), bliver

$$\frac{\partial t}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial s}{\partial u^\alpha} = t_\alpha = e_{\lambda\alpha} n^\lambda = -e_{\alpha\lambda} n^\lambda \quad (5.36)$$

Sammenhængen mellem en vektors komposanter efter u^1, u^2 -systemet og efter n, t -systemet bestemmes på sædvanlig måde som vist i det følgende.

Betragtes eksempelvis $M_{(n)}^*$, haves, i overensstemmelse med fortegneregningen (se Figur 6.1), i referencetilstanden

$$M_{(n)}^* = -M_{(nt)}^* \mathbf{n} + M_{(nn)}^* \mathbf{t} = e_{\beta\lambda} M_*^{\alpha\beta} n_\alpha \mathbf{a}^\lambda \quad (5.37)$$

Størrelsen efter det sidste lighedstegn findes vha. formel (5.28), når denne omskrives til referencetilstanden.

Multipliseres formel (5.37) skalært på begge sider af lighedstegnet med $\mathbf{n} = n^\rho \mathbf{a}_\rho$ fås

$$-M_{(nt)}^* = e_{\beta\lambda} M_*^{\alpha\beta} n_\alpha \mathbf{a}^\lambda \cdot (n^\rho \mathbf{a}_\rho) = e_{\beta\lambda} M_*^{\alpha\beta} n_\alpha n^\rho \delta_\rho^\lambda = e_{\beta\lambda} M_*^{\alpha\beta} n_\alpha n^\lambda \quad (5.38)$$

altså

$$M_{(nt)}^* = -e_{\beta\lambda} M_*^{\alpha\beta} n_\alpha n^\lambda \quad (5.39)$$

Ved skalær multiplikation med $\mathbf{t} = e^{\rho\gamma} n_\rho \mathbf{a}_\gamma$ i (5.37) fås

$$\begin{aligned} M_{(nn)}^* &= e_{\beta\lambda} M_*^{\alpha\beta} n_\alpha \mathbf{a}^\lambda \cdot (e^{\rho\gamma} n_\rho \mathbf{a}_\gamma) = e_{\beta\lambda} e^{\rho\gamma} M_*^{\alpha\beta} n_\alpha n_\rho \delta_\gamma^\lambda = e_{\beta\lambda} e^{\rho\lambda} M_*^{\alpha\beta} n_\alpha n_\rho \\ &= \delta_\beta^\rho M_*^{\alpha\beta} n_\alpha n_\rho = M_*^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \end{aligned} \quad (5.40)$$

altså

$$M_{(nn)}^* = M_*^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \quad (5.41)$$

Som et andet eksempel betragtes opløsningen af rotationsvektoren $\delta\Omega$ efter n, t -systemet. Jf. formel (4.22) fås

$$\delta\Omega = -\delta\Omega_{(n)} \mathbf{n} + \delta\Omega_{(t)} \mathbf{t} = e^{\alpha\lambda} \delta\theta_\alpha \mathbf{a}_\lambda \quad (5.42)$$

Dermed bliver komposanterne

$$\delta\Omega_{(n)} = -e^{\alpha\gamma} \delta\theta_\alpha n_\gamma \quad (5.43)$$

$$\delta\Omega_{(t)} = \delta\theta_\alpha n^\alpha \quad (5.44)$$

Tilsvarende kan $\delta \mathbf{M}_{(n)}^*$ opløses efter n, t -systemet, som jf. formel (5.30) giver

$$\delta \mathbf{M}_{(n)}^* = -\delta A_{(nt)} \mathbf{n} + \delta A_{(nn)} \mathbf{t} + \delta A_3 \mathbf{a}_3 = e_{\lambda\beta} \delta B^{\alpha\beta} n_\alpha \mathbf{a}^\lambda + e_{\lambda\beta} \delta \theta^\lambda M_*^{\alpha\beta} n_\alpha \mathbf{a}_3 \quad (5.45)$$

Her er $\delta B^{\alpha\beta}$ (5.31) indført.

Variationen af $\mathbf{M}_{(n)}^*$ er altså bestemt af størrelserne

$$\delta A_{(nt)} = -e_{\beta\lambda} \delta B^{\alpha\beta} n_\alpha n^\lambda \quad (5.46)$$

$$\delta A_{(nn)} = \delta B^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \quad (5.47)$$

Det ses, at $\delta A_{(nt)}$ har karakter af et vridende moment og $\delta A_{(nn)}$ har karakter af et bøjende moment.

Førsteordensbidraget til arbejdet langs randen i referencetilsatnden er integralet af $\mathbf{N}_{(n)}^* \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{M}_{(n)}^* \cdot \delta \boldsymbol{\Omega}$. Dette betegnes δW . Det arbejde, der skal lægges til grund for randbetingelserne for nærliggende ligevægtstilstande, er tilsvarende integralet af $\delta \mathbf{N}_{(n)}^* \cdot \delta \mathbf{r} + \delta \mathbf{M}_{(n)}^* \cdot \delta \boldsymbol{\Omega}$, som betegnes $\delta^2 W$. Det ses at

$$\begin{aligned} \delta^2 W &= \int \delta \mathbf{N}_{(n)}^* \cdot \delta \mathbf{r} ds_0 + \int \delta \mathbf{M}_{(n)}^* \cdot \delta \boldsymbol{\Omega} ds_0 \\ &= \int \delta C^{\alpha\beta} n_\alpha \mathbf{a}_\beta \cdot \delta \mathbf{r} ds_0 + \int \delta V^\alpha n_\alpha \mathbf{a}_3 \cdot \delta \mathbf{r} ds_0 + \int \delta \mathbf{M}_{(n)}^* \cdot \delta \boldsymbol{\Omega} ds_0 \\ &= \int \delta C^{\alpha\beta} n_\alpha \delta v_\beta ds_0 + \int \delta V^\alpha n_\alpha \delta w ds_0 + \int (\delta A_{(nt)} \delta \Omega_{(n)} + \delta A_{(nn)} \delta \Omega_{(t)}) ds_0 \end{aligned} \quad (5.48)$$

Det bemærkes at $\delta N_*^{\alpha\beta}$, som er en del af $\delta C^{\alpha\beta}$ jf. (5.22), endnu ikke er opløst efter akserne i n, t -systemet.

Før dette gøres ses der nærmere på det sidste integral. Omskrives $\delta \Omega_{(n)}$ fra (5.43) vha. (5.18), (5.35) og (5.36) fås

$$\begin{aligned} \delta \Omega_{(n)} &= -e^{\alpha\gamma} \delta \theta_\alpha n_\gamma = e^{\alpha\gamma} \left(\frac{\partial(\delta w)}{\partial u^\alpha} + b_\alpha^\lambda \delta v_\lambda \right) n_\gamma \\ &= e^{\alpha\gamma} \left(\frac{\partial(\delta w)}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial(\delta w)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u^\alpha} + b_\alpha^\lambda \delta v_\lambda \right) n_\gamma \\ &= e^{\alpha\gamma} \left(\frac{\partial(\delta w)}{\partial n} n_\alpha - e_{\alpha\lambda} n^\lambda \frac{\partial(\delta w)}{\partial s} + b_\alpha^\lambda \delta v_\lambda \right) n_\gamma \\ &= 0 - \delta_\lambda^\gamma n^\lambda n_\gamma \frac{\partial(\delta w)}{\partial s} + e^{\alpha\gamma} b_\alpha^\lambda n_\gamma \delta v_\lambda \\ &= -\frac{\partial(\delta w)}{\partial s} + e^{\alpha\gamma} b_\alpha^\lambda n_\gamma \delta v_\lambda \end{aligned} \quad (5.49)$$

Herved ses at $\delta \Omega_{(n)}$ er bestemt ved flytningerne δv_λ og δw .

Arbejdet bliver

$$\begin{aligned} \delta^2 W = & \int \delta C^{\alpha\beta} n_\alpha \delta v_\beta ds_0 + \int \delta V^\alpha n_\alpha \delta w ds_0 \\ & + \int \left[\delta A_{(nt)} \left(-\frac{\partial(\delta w)}{\partial s} + e^{\gamma\alpha} b_\gamma^\beta n_\alpha \delta v_\beta \right) + \delta A_{(nn)} \delta \Omega_{(t)} \right] ds_0 \end{aligned} \quad (5.50)$$

Forudsættes det, for simpelhedens skyld, at det vridende moment $\delta A_{(nt)}$ er en kontinuert funktion defineret langs hele skalranden, gælder følgende relation

$$\int \delta A_{(nt)} \frac{\partial(\delta w)}{\partial s} ds_0 = \int \left[\frac{\partial}{\partial s} (\delta A_{(nt)} \delta w) - \frac{\partial(\delta A_{(nt)})}{\partial s} \delta w \right] ds_0 = \int -\frac{\partial(\delta A_{(nt)})}{\partial s} \delta w ds_0 \quad (5.51)$$

De tilfælde hvor der kun integreres over dele af randen, eller hvor randen fx har hjørner, behandles på samme måde som randbetingelsen for det vridende moment i den lineære teori. Herom henvises til (Nielsen & Rathkjen, 1981).

Under ovenstående forudsætninger bliver arbejdet fra (5.50)

$$\begin{aligned} \delta^2 W = & \int (\delta C^{\alpha\beta} + \delta A_{(nt)} e^{\gamma\alpha} b_\gamma^\beta) n_\alpha \delta v_\beta ds_0 + \int \left(\delta V^\alpha n_\alpha + \frac{\partial(\delta A_{(nt)})}{\partial s} \right) \delta w ds_0 \\ & + \int \delta A_{(nn)} \delta \Omega_{(t)} ds_0 \end{aligned} \quad (5.52)$$

Ved disse omskrivninger er bidraget fra det vridende moment i $\delta \mathbf{M}_{(n)}^*$ til arbejdet $\delta^2 W$ omformet til arbejdet fra ækvivalente forskydningskræfter $\frac{\partial(\delta A_{(nt)})}{\partial s}$ og arbejdet fra effektive skivekræfter $\delta A_{(nt)} e^{\gamma\alpha} b_\gamma^\beta n_\alpha a_\beta$. Tilbage er kun bidraget fra det bøjende moment $\delta A_{(nn)} \delta \Omega_{(t)}$ i $\delta \mathbf{M}_{(n)}^*$.

Ønskes også det første led på højre side i (5.52) angivet ved komponenter i n, t -systemet skrives

$$\delta D_{(nn)} \mathbf{n} + \delta D_{(nt)} \mathbf{t} = (\delta C^{\alpha\beta} + \delta A_{(nt)} e^{\gamma\alpha} b_\gamma^\beta) n_\alpha a_\beta \quad (5.53)$$

Ved skalær multiplikation med $\mathbf{n} = n_\rho a^\rho$ fås

$$\delta D_{(nn)} \mathbf{n} = \delta C^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + \delta A_{(nt)} e^{\gamma\alpha} b_\gamma^\beta n_\alpha n_\beta = \delta C^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + \frac{\delta A_{(nt)}}{R_{nt}} \quad (5.54)$$

Her er torsionen i n, t -systemet jf. formel (2.52) indført.

$$\frac{1}{R_{nt}} = \frac{1}{T} = b_{\alpha\beta} e^{\alpha\gamma} n_\alpha n^\beta \quad (5.55)$$

Ved skalær multiplikation med $\mathbf{t} = e_{\rho\mu} n^\rho a^\mu$ fås

$$\delta D_{(nt)} = e_{\rho\beta} \delta C^{\alpha\beta} n_\alpha n^\rho + \delta A_{(nt)} e^{\gamma\alpha} e_{\rho\beta} b_\gamma^\beta n_\alpha n^\rho = e_{\rho\beta} \delta C^{\alpha\beta} n_\alpha n^\rho - \frac{\delta A_{(nt)}}{R_t} \quad (5.56)$$

Her er krumningen i t -retningen indført. Den kan beregnes vha. (2.49) hvor h_α erstattes af t_α

$$\frac{1}{R_t} = e^{\gamma\alpha} e^{\rho\beta} b_{\beta\gamma} n_\alpha n_\rho \quad (5.57)$$

Benyttes betegnelserne

$$\delta C_{(nn)} = \delta C^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \quad (5.58)$$

$$\delta C_{(nt)} = e_{\rho\beta} \delta C^{\alpha\beta} n_\alpha n^\rho \quad (5.59)$$

$$\delta V_{(n)} = \delta V^\alpha n_\alpha \quad (5.60)$$

ses det at arbejdet kan skrives

$$\begin{aligned} \delta^2 W = \int \left[\left(\delta C_{(nn)} - \frac{\delta A_{(nt)}}{R_{nt}} \right) \delta v_{(n)} + \left(\delta C_{(nt)} - \frac{\delta A_{(nt)}}{R_t} \right) \delta v_{(t)} \right] ds_0 \\ + \int \left(\delta V_{(n)} + \frac{\partial(\delta A_{(nt)})}{\partial s} \right) \delta w ds_0 + \int \delta A_{(nn)} \delta \Omega_{(t)} ds_0 \end{aligned} \quad (5.61)$$

Her er $\delta v_{(n)}$ og $\delta v_{(t)}$ komponenter af $\delta \mathbf{v}$ i n, t -systemet, dvs.

$$\delta \mathbf{v} = \delta v_{(n)} \mathbf{n} + \delta v_{(t)} \mathbf{t} = \delta v_\beta \mathbf{a}^\beta \quad (5.62)$$

Og dermed er

$$\delta v_\rho = n_\rho \delta v_{(n)} + e_{\mu\rho} n^\mu \delta v_{(t)} \quad (5.63)$$

hvoraf

$$\delta v_{(n)} = \delta v_\beta n^\beta \quad (5.64)$$

$$\delta v_{(t)} = e^{\alpha\beta} \delta v_\beta n_\alpha \quad (5.65)$$

Det bemærkes at rotationerne $\delta \Omega_{(n)}$ og $\delta \Omega_{(t)}$ derved kan udtrykkes ved δw , $\delta v_{(n)}$ og $\delta v_{(t)}$ på følgende måde

$$\delta \Omega_{(n)} = - \left(\frac{\partial(\delta w)}{\partial s} + \frac{\delta v_{(n)}}{R_{nt}} + \frac{\delta v_{(t)}}{R_t} \right) \quad (5.66)$$

$$\delta \Omega_{(t)} = - \left(\frac{\partial(\delta w)}{\partial n} + \frac{\delta v_{(n)}}{R_n} + \frac{\delta v_{(t)}}{R_{nt}} \right) \quad (5.67)$$

Størrelserne

$$\frac{1}{R_n} = b_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta \quad (5.68)$$

$\frac{1}{R_t}$ og $\frac{1}{R_{nt}}$ er krumninger og torsion langs randen i n, t -systemet. Det bemærkes at $\delta \Omega_{(n)}$ er bestemt når δw , $\delta v_{(n)}$ og $\delta v_{(t)}$ kendes langs randen, mens $\delta \Omega_{(t)}$ yderligere kræver angivelsen af $\frac{\partial(\delta w)}{\partial n}$. De værdier af flytningerne på randen, der kan foreskrives, er derfor $\delta v_{(n)}$, $\delta v_{(t)}$, δw og $\frac{\partial(\delta w)}{\partial n}$.

5.3 Randbetingelser

Randbetingelserne for nærliggende ligevægtstilstande kan nu formuleres ved at kræve, at arbejdet fra de påførte kræfter og momenter på randen $\delta \tilde{\mathbf{N}}_{(n)}^* \cdot \delta \mathbf{r}$ og $\delta \tilde{\mathbf{M}}_{(n)}^* \cdot \delta \boldsymbol{\Omega}$ er lig med arbejdet fra kræfterne og momenterne for de indre kræfter på randen. Bølgestregen benyttes til at angive, at der er tale om påførte størrelser.

Der betragtes nu to typiske tilfælde. Et hvor der er tale om en dødvægtsbelastning og et hvor belastningerne følger det lokale randkoordinatsystem.

I det første tilfælde antages, at de påførte kræfter og momenter beholder deres størrelse og retning, dvs. begge bidrag til arbejdet $\delta^2 W$ er nul. Hvis $\delta^2 W$ iflg. (5.61) skal være nul for enhver værdi af $\delta v_{(n)}$, $\delta v_{(t)}$, δw og $\frac{\partial(\delta w)}{\partial n}$ skal

$$\delta C_{(nn)} - \frac{\delta A_{(nt)}}{R_{nt}} = 0 \quad (5.69)$$

$$\delta C_{(nt)} - \frac{\delta A_{(nt)}}{R_t} = 0 \quad (5.70)$$

$$\delta V_{(n)} + \frac{\partial(\delta A_{(nt)})}{\partial s} = 0 \quad (5.71)$$

$$\delta A_{(nn)} = 0 \quad (5.72)$$

Størrelserne $\delta C_{(nn)}$, $\delta C_{(nt)}$, $\delta V_{(n)}$, $\delta A_{(nt)}$ og $\delta A_{(nn)}$ bestemmes vha. formlerne hhv. (5.58), (5.59), (5.60), (5.46) og (5.47).

I det andet tilfælde antages de ydre kræfter og momenter at følge n, t -systemet uden at ændre størrelse. I n, t -systemet haves, idet de påførte kræfter igen betegnes med bølgestreg

$$\tilde{\mathbf{N}}_{(n)}^* = \tilde{N}_{(nn)}^* \mathbf{n} + \tilde{N}_{(nt)}^* \mathbf{t} + \tilde{Q}_{(n)}^* \mathbf{a}_3 \quad (5.73)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_{(n)}^* = -\tilde{M}_{(nt)}^* \mathbf{n} + \tilde{M}_{(nn)}^* \mathbf{t} \quad (5.74)$$

For at kunne beregne $\delta \tilde{\mathbf{N}}_{(n)}^*$, når $\delta \tilde{N}_{(nn)}^* = \delta \tilde{N}_{(nt)}^* = \delta \tilde{Q}_{(n)}^* = 0$ og $\delta \tilde{\mathbf{M}}_{(n)}^*$, når $\delta \tilde{M}_{(nt)}^* = \delta \tilde{M}_{(nn)}^* = 0$ må $\delta \mathbf{n}$ og $\delta \mathbf{t}$ kendes. Idet beregningerne følger samme fremgangsmåde som ovenfor, anføres her kun resultatet der er

$$\delta \mathbf{n} = -(\delta v_{,\beta}^\alpha - b_\beta^\alpha \delta w) n_\alpha \mathbf{a}^\beta + \delta \varepsilon_{(n)} n_\alpha \mathbf{a}^\alpha - \delta \theta^\alpha n_\alpha \mathbf{a}_3 \quad (5.75)$$

$$\delta \mathbf{t} = -e^{\beta\gamma} (\delta v_{,\beta}^\alpha - b_\beta^\alpha \delta w) n_\alpha \mathbf{a}_\gamma + e^{\alpha\gamma} \delta \varepsilon_{(n)} n_\alpha \mathbf{a}_\gamma - e^{\alpha\beta} \delta \theta_\beta n_\alpha \mathbf{a}_3 \quad (5.76)$$

Størrelsen $\delta \varepsilon_{(n)}$ er, som tidligere angivet, længdetøjningen i n -retningen, dvs. $\delta \varepsilon_{(n)} = \delta \varepsilon_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta$, jf. formel (4.12).

Herefter kan $\delta\tilde{\mathbf{N}}_{(n)}^*$ og $\delta\tilde{\mathbf{M}}_{(n)}^*$ beregnes vha. hhv. (5.73) og (5.74) og dernæst arbejderne $\delta\tilde{\mathbf{N}}_{(n)}^* \cdot \delta\mathbf{r}$ og $\delta\tilde{\mathbf{M}}_{(n)}^* \cdot \delta\boldsymbol{\Omega}$, der udtrykkes ved flytninger og rotationer i n, t -systemet. Endelig kræves overensstemmelse med (5.61) for de enkelte komponenter. Formlerne bliver komplicerede og vil ikke blive angivet her.

Endelig må det beskrives hvorledes der tages hensyn til, at der langs en rand eller dele heraf kan være forskrevne værdier af flytningerne. Med de ovenfor indførte betegnelser gælder følgende formler

$$\delta D_{(nn)} = \delta C_{(nn)} - \frac{\delta A_{(nt)}}{R_{nt}} \quad (5.77)$$

$$\delta D_{(nt)} = \delta C_{(nt)} - \frac{\delta A_{(nt)}}{R_t} \quad (5.78)$$

Desuden indføres betegnelserne

$$\delta F_{(n)} = \delta V_{(n)} + \frac{\partial(\delta A_{(nt)})}{\partial s} \quad (5.79)$$

$$\delta G_{(nn)} = \delta A_{(nn)} \quad (5.80)$$

Disse formler kan bruges hvis der på en rand foreskrives en eller flere af størrelserne $\delta v_{(n)}$, $\delta v_{(t)}$, δw og $\frac{\partial(\delta w)}{\partial n}$. Formel (5.77) til at bregne tilvæksten $\delta D_{(nn)}$ i normalkraften i n -retningen, formel (5.78) til at beregne tilvæksten $\delta D_{(nt)}$ i skiveforskydningskraften i t -retningen, formel (5.79) til at beregne tilvæksten i den "effektive" forskydningskraft $\delta F_{(n)}$ i skalnornalens retning og endelig benyttes formel (5.80) til at beregne tilvæksten i det bøjende moment $\delta G_{(nn)}$ om t -aksen.

I teorier, hvor der formuleres konstitutive ligninger for forskydningskræfter, kan der kræves fuld overensstemmelse mellem påførte kræfter og momenter, og kræfter og momenter fra de indre kræfter, se (Nielsen, 2004) afsnit 9. For nærliggende ligevægtstilstande bliver beregningen derfor betydeligt enklere. Tilfældet vil ikke blive behandlet nærmere her.

6 Konstitutive ligninger

I de fleste skalteorier benyttes meget simple konstitutive ligninger. De tages simpelthen fra skive- og pladeteorien, dvs. indflydelsen af skallens krumning negligeres fuldstændigt.

I det følgende omtales kun lineærelastiske materialer.

De konstitutive ligninger i skive- og pladeteorien er behandlet i (Nielsen & Rathkjen, 1981). De er simple eksakte løsninger for homogene plane spændingstilstande for lineærelastiske materialer.

I dette afsnit vil de konstitutive ligninger for skiver og plader blive omskrevet til skalkonstruktionens tensorkomponenter. Desuden vil deres anvendelse i stabilitetsteorien blive behandlet.

I dette afsnit vil betegnelser for flytnings- og deformationsstørrelser blive skrevet uden tilvæksttegnet δ . Forbindelsen til de hidtil anvendte betegnelser knyttes i afsnit 8.2.

6.1 Konstitutive ligninger i lineær skalteori

6.1.1 Pladevirkning

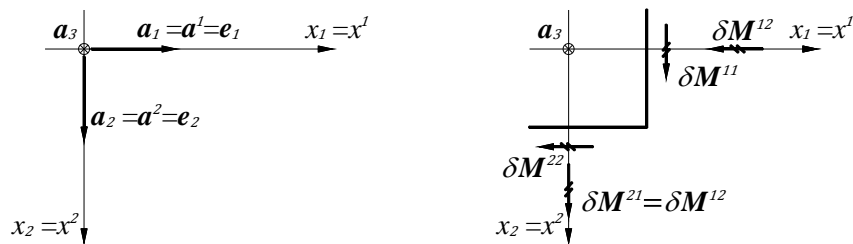
Betragt (3.18) i udskrevet form

$$\mathbf{M}_{(n)} = e_{\beta\lambda} M^{\alpha\beta} n_{\alpha} \mathbf{a}^{\lambda} = e_{12} (M^{11} n_1 \mathbf{a}^2 + M^{21} n_2 \mathbf{a}^2 - M^{12} n_1 \mathbf{a}^1 - M^{22} n_2 \mathbf{a}^1) \quad (6.1)$$

Formlen giver momentet pr. længdeenhed i et snit med den udadrettede enhedsnormal

$\mathbf{n} = n^{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha} = n_{\alpha} \mathbf{a}^{\alpha}$, altså

$$\mathbf{n} = n_1 \mathbf{a}^1 + n_2 \mathbf{a}^2 \quad (6.2)$$



Figur 6.1 – Bøjende og vridende momenter i en plade

Figur 6.1, til venstre, viser basisvektorerne i et retvinklet koordinatsystem. Her er $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}^1 = \mathbf{e}_1$ og $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}^2 = \mathbf{e}_2$ hvor \mathbf{e}_1 og \mathbf{e}_2 er enhedsvektorer i hhv. x^1 - og x^2 -aksens retning. Hermed bliver $a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$ og determinanten $a = 1$.

I Figur 6.1, til højre, vises positive værdier af momentkomposanterne i snit med hhv. x^1 - og x^2 -aksen som udadgående normaler.

I formel (6.1) og (6.2) gælder det, at for snittet vinkelret på x^1 -aksen er $n_1 = 1$ og $n_2 = 0$ og for snittet vinkelret på x^2 -aksen er $n_1 = 0$ og $n_2 = 1$. Desuden gælder det, at $M^{\alpha\beta}$ er symmetrisk, som det blev antaget i afsnit 3.2, og at $e_{12} = 1$. I det betragtede koordinatsystem forsvinder ligeledes forskellen mellem kovariante, blandede og kontravariante komponenter af $M^{\alpha\beta}$, dvs.

$$M^{\alpha\beta} = M_{\beta}^{\alpha} = M_{\alpha\beta} \quad (6.3)$$

Deformationsstørrelserne svarende til $M^{\alpha\beta}$ er den asymmetriske bøjningstensor $\kappa_{\alpha\beta}$, som i den lineære teori er defineret ved som formel (4.34). At $M^{\alpha\beta}$ og $\kappa_{\alpha\beta}$ hænger naturligt sammen vil blive beskrevet nærmere i afsnit 7, hvor det indre virtuelle arbejde omtales.

For en plade i x^1, x^2 -systemet som defineret ovenfor, bliver deformationsstørrelserne den symmetriske bøjningstensor $\kappa_{\alpha\beta}$. Udtrykt ved flytningerne jf. de til (4.35) og (4.20) analoge formler kan bøjningstensoren skrives, idet $b_{\alpha}^{\gamma} = 0$ for plader og skiver

$$\kappa_{\alpha\beta} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \quad (6.4)$$

Her er w naturligvis flytningen af pladen vinkelret på pladens midterflade regnet positiv i \mathbf{a}_3 -retningen, som er bestemt ved retningen af $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$.

De konstitutive ligninger bliver, se ovennævnte henvisninger

$$\frac{Eh^3}{12} \kappa_{11} = M_{11} - \nu M_{22} \quad (6.5)$$

$$\frac{Eh^3}{12} \kappa_{22} = M_{22} - \nu M_{11} \quad (6.6)$$

$$\frac{Eh^3}{12} \kappa_{12} = (1 + \nu) M_{12} \quad (6.7)$$

Her er h pladetykkelsen og $\frac{h^3}{12}$ er derfor inertimomentet pr. længdeenhed, E er elasticitetsmodul for træk og tryk og ν er Poissons forhold.

Disse ligninger kan også skrives

$$\frac{Eh^3}{12} \kappa_{11} = (1 + \nu) M_{11} - \nu (M_{11} - M_{22}) \quad (6.8)$$

$$\frac{Eh^3}{12} \kappa_{22} = (1 + \nu) M_{22} - \nu (M_{11} - M_{22}) \quad (6.9)$$

$$\frac{Eh^3}{12} \kappa_{12} = (1 + \nu) M_{12} \quad (6.10)$$

der, som let eftervises, kan skrives på den korte form

$$\frac{Eh^3}{12}\kappa_{\alpha\beta} = (1+\nu)\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\mu}M^{\rho\mu} - \nu\delta_{\alpha\beta}\delta_{\rho\mu}M^{\rho\mu} \quad (6.11)$$

Udnyttes at en tensorligning har samme form i ethvert koordinatsystem kan der uden yderligere beregninger sluttet, at de konstitutive ligninger i et vilkårligt u^1, u^2 -system er

$$\frac{Eh^3}{12}\kappa_{\alpha\beta} = (1+\nu)a_{\alpha\rho}a_{\beta\mu}M^{\rho\mu} - \nu a_{\alpha\beta}a_{\rho\mu}M^{\rho\mu} \quad (6.12)$$

som kan omskrives til følgende simple form

$$\frac{Eh^3}{12}\kappa_{\alpha\beta} = (1+\nu)M_{\alpha\beta} - \nu a_{\alpha\beta}M_{\rho}^{\rho} \quad (6.13)$$

De omvendte relationer, altså $M_{\alpha\beta}$ som funktion af $\kappa_{\alpha\beta}$, findes ved først at bestemme $\kappa_{\rho}^{\rho} = a^{\rho\mu}\kappa_{\rho\mu}$ vha. (6.13), hvorefter ligningerne kan løses mht. $M_{\alpha\beta}$. Derved findes

$$M_{\alpha\beta} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\left(\kappa_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu}a_{\alpha\beta}\kappa_{\rho}^{\rho}\right) \quad (6.14)$$

6.1.2 Skivevirkning

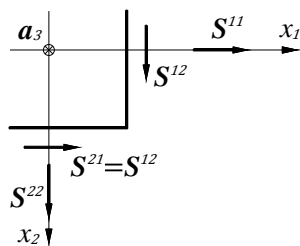
De konstitutive ligninger for skivekræfter og tilhørende deformationer bliver en sammenhæng mellem $N^{\alpha\beta}$ og tøjningstensoren $\varepsilon_{\alpha\beta}$.

I det ovenfor introducerede x^1, x^2 -system bliver denne sammenhæng identisk med ligningerne for plan spændingstilstand, da det her kun er den symmetriske del, $S^{\alpha\beta}$, af $N^{\alpha\beta}$ som giver værdier forskellige fra nul. Jf. (3.31) ses, at den asymmetriske del, $F^{\alpha\beta}$, af $N^{\alpha\beta}$ er lig med nul, da $b_{\alpha}^{\gamma} = 0$.

Kraften pr. længdeenhed fra $S^{\alpha\beta}$ i et vilkårligt snit med den udadrettede enhedsnormal \mathbf{n} kan bestemmes vha. (3.12), dvs.

$$\mathbf{N}_{(n)} = N^{\alpha\beta}n_{\alpha}\mathbf{a}_{\beta} = S^{\alpha\beta}n_{\alpha}\mathbf{a}_{\beta} = S^{11}n_1\mathbf{a}_1 + S^{21}n_2\mathbf{a}_2 + S^{12}n_1\mathbf{a}_1 + S^{22}n_2\mathbf{a}_2 \quad (6.15)$$

Kræfterne pr. længdeenhed på et snit hhv. vinkelret på x^1 - og x^2 -aksen og med disse akser som udadgående normal er vist i Figur 6.2.



Figur 6.2 – Skivekræfter

I analogi med (6.3) haves for en skive

$$S^{\alpha\beta} = S_{\beta}^{\alpha} = S_{\alpha\beta} \quad (6.16)$$

Komponenterne til tøjningstensoren bliver iflg. (4.13)

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x^1} \quad (6.17)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x^2} \quad (6.18)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial v_2}{\partial x^1} \right) \quad (6.19)$$

Her er v_1 og v_2 flytninger i hhv. x^1 - og x^2 -aksens retning.

De konstitutive ligninger bliver

$$Eh\varepsilon_{11} = S_{11} - \nu S_{22} \quad (6.20)$$

$$Eh\varepsilon_{22} = S_{22} - \nu S_{11} \quad (6.21)$$

$$Eh\varepsilon_{12} = (1 + \nu)S_{12} \quad (6.22)$$

Fortsættes som ovenfor vedr. momenterne, findes at de konstitutive ligninger kan skrives

$$Eh \varepsilon_{\alpha\beta} = (1 + \nu)S_{\alpha\beta} - \nu a_{\alpha\beta} S_{\gamma}^{\gamma} \quad (6.23)$$

De omvendte relationer bliver

$$S^{\alpha\beta} = \frac{Eh}{1 + \nu} \left(\varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1 - \nu} a_{\alpha\beta} \varepsilon_{\rho}^{\rho} \right) \quad (6.24)$$

Når de konstitutive ligninger i (6.14) og (6.24), eller tilsvarende, anvendes på en skalkonstruktion begås der fejl. Betragtes fx tilfældet ren bøjning af en skal, der kun er krum i én retning, bliver tøjningsfordelingen ganske vist plan, se fx (Nielsen, et al., 1977), afsnit 3.10, men spændingsfordelingen bliver ikke plan, og der vil være forlængelser eller forkortelser i skalmidterfladen. Videre gælder det, at belastningstilfældet med normalkræfter alene ikke kan betragtes isoleret, da der ikke vil være ligevægt.

Når de ovenfor beskrevne ukoblede ligninger alligevel giver brugbare resultater, skyldes det, som nærmere beskrevet i (Nielsen, 2004), at hvis større nøjagtighed ønskes, må ikke alene de ovenfor udviklede ligninger forbedres, men samtidigt må virkningen af forskydningskræfterne og normalspændingerne i skalnormalens retning medtages.

Vedr. hensyntagen til forskydningskræfternes virkning henvises til (Nielsen, 2004), afsnit 9 og 11.1.

6.2 Konstitutive ligninger i stabilitetsteori for skalkonstruktioner

I stabilitetsteori er der, som det fremgår af det foregående, brug for at kunne udregne ændringer af snitkræfterne som funktion af ændringer af deformationerne.

Med en skalteori for store deformationer ville det i princippet være enkelt at beregne ændringerne i snitkræfterne. Imidlertid haves en sådan generel teori ikke til rådighed, og en simplere fremgangsmåde må anvendes.

Ligningerne (6.14) og (6.24) kan skrives på følgende form

$$M^{\alpha\beta} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left(a^{\alpha\rho} a^{\beta\mu} \kappa_{\rho\mu} + \frac{\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} \kappa_{\gamma}^{\gamma} \right) \quad (6.25)$$

$$S^{\alpha\beta} = \frac{Eh}{1+\nu} \left(a^{\alpha\rho} a^{\beta\mu} \varepsilon_{\rho\mu} + \frac{\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma}^{\gamma} \right) \quad (6.26)$$

Vedr. anvendelser i stabilitetsteorien vendes nu tilbage til de i det foregående benyttede betegnelser, dvs. $\varepsilon_{\alpha\beta}$ og $\kappa_{\alpha\beta}$ eller $\kappa_{\alpha\beta}$ ændres til $\delta\varepsilon_{\alpha\beta}$ og $\delta\kappa_{\alpha\beta}$ eller $\delta\kappa_{\alpha\beta}$. Betegnelserne for flytningerne v^{α} , v_{α} og w ændres til δv^{α} , δv_{α} og δw og der foretages andre analoge ændringer.

Der gøres nu den simple antagelse, at ligningerne (6.25) og (6.26) kan benyttes til at beregne ændringerne $\delta M_{*}^{\alpha\beta}$ og $\delta S_{*}^{\alpha\beta}$, dvs. ændringerne i de transformerede snitkræfter. I venstresiden indsættes $\delta M_{*}^{\alpha\beta}$ og $\delta S_{*}^{\alpha\beta}$ og i højresiderne erstattes $\varepsilon_{\alpha\beta}$ og $\kappa_{\alpha\beta}$ med hhv. $\delta\varepsilon_{\alpha\beta}$ og $\delta\kappa_{\alpha\beta}$. Herved fås

$$\delta M_{*}^{\alpha\beta} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left(a^{\alpha\rho} a^{\beta\mu} \delta\kappa_{\rho\mu} + \frac{\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} \delta\kappa_{\gamma}^{\gamma} \right) \quad (6.27)$$

$$\delta S_{*}^{\alpha\beta} = \frac{Eh}{1+\nu} \left(a^{\alpha\rho} a^{\beta\mu} \delta\varepsilon_{\rho\mu} + \frac{\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} \delta\varepsilon_{\gamma}^{\gamma} \right) \quad (6.28)$$

Deformationsstørrelserne $\delta\kappa_{\rho\mu}$ og $\delta\varepsilon_{\rho\mu}$ er deformationerne målt ud fra den tilstand, hvis stabilitet ønskes bestemt.

Det bemærkes, at disse ligninger ikke ville være korrekte for et lineærelastisk materiale, der følger formlerne af typen (6.14) og (6.24) for vilkårligt store deformationer, idet det ville være de metriske tensorer i referencetilstanden, der skal benyttes og ikke som i (6.27) og (6.28), hvor

det er de metriske tensorer i den tilstand, hvis stabilitet ønskes undersøgt, der indgår. Ved praktisk anvendelse vil det dog ofte være unødvendigt at skelne mellem de metriske tensorer i referencetilstanden og i den tilstand hvis stabilitet ønsket bestemt.

7 Stabilitetsteori - Energimetoden

Alternativt til ligevægtsmetoden kan energimetoden benyttes. Her behandles stabilitetsproblemet ved at betragte energiforholdene ved ændring af ligevægtstilstanden i stedet for at betragte nærliggende ligevægtstilstande. De to metoder er ækvivalente, hvilket omtales nærmere i det følgende.

Den grundlæggende teori for energimetoden blev kort behandlet i indledningen, derudover henvises til (Nielsen, 1976).

7.1 Stabilitetskriteriet

Statiske og geometriske størrelser, der er valgt og beskrevet i de forgående afsnit til at karakterisere hhv. spændings- og deformationstilstanden i en skalkonstruktionen, tillader formuleringen af det virtuelle arbejdes princip.

7.1.1 Virtuelle arbejdes princip

Der betragtes en ligevægtstilstand, hvis stabilitet ønskes undersøgt. Denne ligevægtstilstand er bestemt ved de indre kræfter $N^{\alpha\beta}$, Q^α og $M^{\alpha\beta}$, som sammen med belastningsstørrelserne p^α og p^3 opfylder ligevægtsbetingelserne (3.25) - (3.28). Derudover forudsættes det, at de statiske randbetingelser er opfyldt.

Betragt dernæst en virtuel flytningstilstand karakteriseret ved en flytning $\delta \mathbf{r}$. Flytningstilstanden er vilkårlig men skal naturligvis passe til skalkonstruktionens understøtningsbetingelser. De her til hørende deformationsstørrelser er tøjningstensoren $\delta \varepsilon_{\alpha\beta}$, og bøjningstensoren $\delta k_{\alpha\beta}$, der har den symmetriske del $\delta \kappa_{\alpha\beta}$. Der gælder følgende

$$\delta \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \delta a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta v_{\beta,\alpha} + \delta v_{\alpha,\beta}) - b_{\alpha\beta} \delta w$$

$$\delta k_{\alpha\beta} = \delta \theta_{\beta,\alpha} - b_\alpha^\gamma \delta \omega_{\beta\gamma}$$

$$\delta \kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta k_{\alpha\beta} + \delta k_{\beta\alpha}) = \frac{1}{2} (\delta \theta_{\alpha,\beta} + \delta \theta_{\beta,\alpha}) - \frac{1}{2} b_\alpha^\gamma \delta \omega_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} b_\beta^\gamma \delta \omega_{\alpha\gamma}$$

Rotationen af normalen \mathbf{a}_3 er givet ved rotationsvektoren, $\delta \boldsymbol{\Omega} = e^{\alpha\lambda} \delta \theta_\alpha \mathbf{a}_\lambda$, se (4.22).

At det indre og ydre virtuelle arbejde er lig med hinanden kan vises ved at antage, at det indre arbejde pr. enhedsareal kan udtrykkes ved

$$N^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} \delta k_{\alpha\beta} \tag{7.1}$$

Det indre virtuelle arbejde findes ved at integrere over hele skallens midterflade, som derefter ved en række omskrivninger og ved anvendelse af ligevægtsligninger og Gauss' integralsætning kan vises at være lig med det ydre virtuelle arbejde.

Dette er vist i (Nielsen, 2004). Det virtuelle arbejdes princip kan skrives

$$\begin{aligned} \int_F (M^{\alpha\beta} \delta k_{\alpha\beta} + N^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta}) dF = \\ \int_F p^3 \delta w dF + \int_F p^\beta \delta v_\beta dF + \int_S M^{\alpha\beta} \delta \theta_\alpha n_\alpha ds + \int_S N^{\alpha\beta} \delta v_\beta n_\alpha ds + \int_S Q^\beta n_\beta \delta w ds \end{aligned} \quad (7.2)$$

På venstre side integreres der, som nævnt, over hele skallen midterflade F . På højre side integreres der i de to første led igen over midterfladen, mens der i de tre sidste led integreres langs randen S , som har den udadrettede enhedsnormal \mathbf{n} . Størrelsen n_α er de kovariante komponenter af \mathbf{n} .

Det bemærkes, at størrelserne af snitkræfter er uafhængige af flytnings- og deformationsstørrelserne. Dette betyder, at flytningsstørrelserne og dertil hørende deformationsstørrelser ikke nødvendigvis behøver at være de deformationsstørrelser, der fremkommer ved de snitkræfter, som indsættes i (7.2).

Yderligere ses det, at $N^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta}$ kan erstattes med $S^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta}$, da $\delta \varepsilon_{\alpha\beta}$ er symmetrisk. Er $M^{\alpha\beta}$ symmetrisk, kan $M^{\alpha\beta} \delta k_{\alpha\beta}$ erstattes med $M^{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta}$.

Vha. formlerne for $\mathbf{N}_{(n)}$, $\mathbf{M}_{(n)}$, \mathbf{p} og $\delta \mathbf{r}$, dvs

$$\mathbf{N}_{(n)} = N^{\alpha\beta} n_\alpha \mathbf{a}_\beta + Q^\alpha n_\alpha \mathbf{a}_3$$

$$\mathbf{M}_{(n)} = e_{\beta\lambda} M^{\alpha\beta} n_\alpha \mathbf{a}^\lambda$$

$$\mathbf{p} = p^\alpha \mathbf{a}_\alpha + p^3 \mathbf{a}_3$$

$$\delta \mathbf{r} = \delta v^\alpha \mathbf{a}_\alpha + \delta w \mathbf{a}_3 = \delta v_\alpha \mathbf{a}^\alpha + \delta w \mathbf{a}_3$$

samt formel (4.22) for $\delta \Omega$ kan (7.2) omskrives til

$$\int_F (M^{\alpha\beta} \delta k_{\alpha\beta} + N^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta}) dF = \int_F \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{r} dF + \int_S (\mathbf{M}_{(n)} \cdot \delta \Omega + \mathbf{N}_{(n)} \cdot \delta \mathbf{r}) ds \quad (7.3)$$

For at udlede stabilitetskriteriet for en skalkonstruktion benyttes det virtuelle arbejdes princip med indførelse af de transformerende snitkræfter som beskrevet i afsnit 4.2.1, og ved indførelse af den transformerende randkraft $\mathbf{N}_{(n)}^*$ og det transformerende randmoment $\mathbf{M}_{(n)}^*$ bestemt ved

$$\mathbf{N}_{(n)}^* = \mathbf{N}_{(n)} \frac{ds}{ds_0} \quad (7.4)$$

$$\mathbf{M}_{(n)}^* = \mathbf{M}_{(n)} \frac{ds}{ds_0} \quad (7.5)$$

Her er ds buelængden langs, randen og ds_0 er den tilsvarende værdi i referencetilstanden.

Formel (7.2) kan da skrives

$$\int_{F_0} (M_*^{\alpha\beta} \delta k_{\alpha\beta} + N_*^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta}) dF_0 = \int_{F_0} p_*^3 \delta w dF_0 + \int_{F_0} p_*^\beta \delta v_\beta dF_0 + \int_{S_0} M_*^{\alpha\beta} \delta \theta_\alpha n_\alpha ds_0 + \int_{S_0} N_*^{\alpha\beta} \delta v_\beta n_\alpha ds_0 + \int_{S_0} Q_*^\beta n_\beta \delta w ds_0 \quad (7.6)$$

Her er arealelementet i referencetilstande betegnet med $dF_0 = \sqrt{a_0} du^1 du^2$.

Tilsvarende kan formel (7.3) skrives

$$\int_{F_0} (M_*^{\alpha\beta} \delta k_{\alpha\beta} + N_*^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta}) dF_0 = \int_{F_0} \mathbf{p}_* \cdot \delta \mathbf{r} dF_0 + \int_{S_0} (\mathbf{M}_{(n)}^* \cdot \delta \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{N}_{(n)}^* \cdot \delta \mathbf{r}) ds_0 \quad (7.7)$$

I stedet for som ovenfor at betragte en enkelt ligevægtstilstand og påføre denne en virtuel deformation, betragtes en kontinuert række af ligevægtstilstande. Disse ligevægtstilstande kan frembringes ved fx at lade stedvektoren \mathbf{r} være en funktion af en parameter, eksempelvis tiden t , som beskrevet i indledningen af afhandlingen. En anden mulighed for at frembringe en følge af ligevægtstilstande er, at de enkelte ligevægtstilstande ændres ved trinvis at påføre en infinitesimal flytning $\delta \mathbf{r}$. For hvert $\delta \mathbf{r}$ beregnes deformationsstørrelserne $\delta \varepsilon_{\alpha\beta}$ og $\delta k_{\alpha\beta}$ vha. ovenstående formler.

Betegnelserne $\Delta \varepsilon_{\alpha\beta}$ og $\Delta k_{\alpha\beta}$ benyttes for den samlede værdi. Dvs. at for førstnævnte metode til opstilling af en række ligevægtsligninger findes $\Delta \varepsilon_{\alpha\beta}$ og $\Delta k_{\alpha\beta}$ ved integration mht. tiden. For sidstnævnte metode findes $\Delta \varepsilon_{\alpha\beta}$ og $\Delta k_{\alpha\beta}$ ved at summere $\delta \varepsilon_{\alpha\beta}$ og $\delta k_{\alpha\beta}$ svarende de enkelte bidrag.

7.1.2 Stabilitet

Betrakt nu en ligevægtstilstand med snitkræfterne $M_*^{\alpha\beta}$ og $N_*^{\alpha\beta}$ og med den ydre belastning på skallens midterflade \mathbf{p}_* samt randpåvirkningerne karakteriseret ved momenterne $\mathbf{M}_{(n)}^*$ og kræfterne $\mathbf{N}_{(n)}^*$.

Betrakt dernæst en ændring af denne ligevægtstilstand svarende til en infinitesimal flytning $\delta \mathbf{r}$. Til denne ændring hører rotationen $\delta \boldsymbol{\Omega}$. Ændringen af ligevægtstilstanden kan ske ved at tilføje visse ydre kræfter på skallens midterflade og momenter og kræfter på randen. Arbejdet de tilføjede momenter og kræfter skal udføre betegnes δA og er bestemt ved

$$\delta A = \int_{F_0} (M_*^{\alpha\beta} \delta k_{\alpha\beta} + N_*^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta}) dF_0 - \int_{F_0} \mathbf{p}_* \cdot \delta \mathbf{r} dF_0 - \int_{S_0} (\mathbf{M}_{(n)}^* \cdot \delta \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{N}_{(n)}^* \cdot \delta \mathbf{r}) ds_0 \quad (7.8)$$

Hvis en fuldstændig ikke-lineær skalteori for konservative ydre kræfter var til rådighed ville A være den potentielle energi og δA den første variation af den potentielle energi. Første led på højre side ville være den første variation af den elastiske energi mens de to sidste led fratræk-

ker det arbejde, som belastning og de givne randmomenter og randkræfter ville udføre ved den påførte deformation.

Imidlertid haves ikke en fuldstændig ikke-lineær skalteori til rådighed, og δA må derfor bestemmes vha. de definitioner mv., der er indført i de foregående afsnit. I stedet for den første variation af den elastiske energi optræder derfor i (7.8) det indre arbejde, som $M_*^{\alpha\beta}$ og $N_*^{\alpha\beta}$ udfører ved deformationsstørrelserne $\delta k_{\alpha\beta}$ og $\delta \varepsilon_{\alpha\beta}$, der svarer til den påførte deformation. Snitkræfterne $M_*^{\alpha\beta}$ og $N_*^{\alpha\beta}$ må naturligvis forestilles at være bestemt svarende til en forudgående deformation og er altså ikke snitkræfter fremkaldt af deformationerne $\delta k_{\alpha\beta}$ og $\delta \varepsilon_{\alpha\beta}$.

Af (7.7) fremgår, at $\delta A = 0$, dvs. førsteordensbidraget til det arbejde der skal udføres for, at deformere skalkonstruktionen yderligere er nul, når det drejer sig om en ligevægtstilstand. Arbejdet er derfor bestemt af højereordens bidrag.

Der gøres nu den vigtige forudsætning, at $\delta \mathbf{p}_* = \delta \mathbf{M}_{(n)}^* = \delta \mathbf{N}_{(n)}^* = \mathbf{0}$, der svarer til at belastningen og randpåvirkningerne bevarer deres retning og størrelse. Variationen af anden orden $\delta^2 A = \delta(\delta A)$ beregnet vha. (7.8) bliver under disse forudsætninger bestemt ved

$$\delta^2 A = \int_{F_0} (\delta M_*^{\alpha\beta} \delta k_{\alpha\beta} + \delta N_*^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} + M_*^{\alpha\beta} \delta^2 k_{\alpha\beta} + N_*^{\alpha\beta} \delta^2 \varepsilon_{\alpha\beta}) dF_0 \quad (7.9)$$

idet bidragene fra belastningerne på skallen og dens rand udgår.

En ligevægtstilstand kaldes stabil, hvis det arbejde, som skal udføres for at føre konstruktionen til en vilkårlig nærliggende ligevægtstilstand, er positivt. Dette er den såkaldte statiske definition af en stabil ligevægtstilstand. Det findes også en dynamisk definition, som ikke vil blive omtalt her.

En tilstrækkelig betingelse for, at en ligevægtstilstand er stabil, er at

$$\delta^2 A > 0 \quad (7.10)$$

for enhver geometrisk mulig infinitesimal flytning $\delta \mathbf{r}$. Betingelsen er ikke nødvendig, idet det kan ske, at $\delta^2 A = 0$, hvorfor højere ordens bidrag må udregnes for at afgøre, om ligevægtstilstanden er stabil. Disse forhold vil ikke blive kommenteret nærmere her. Ligeledes bemærkes, at den variationsregning som benyttes her (svage variationer) ikke altid er tilstrækkelig.

For at kunne beregne leddene i (7.9) må bl.a. $\delta M_*^{\alpha\beta}$ og $\delta N_*^{\alpha\beta}$ kendes. Hertil antages at de konstitutive ligninger i (6.27) og (6.28) gælder. Derudover indgår den anden variation af hhv. bøjningstensen og tøjningstensen, som må bestemmes.

Da $\delta M^{\alpha\beta}$ er symmetrisk kan $\delta M^{\alpha\beta} \delta k_{\alpha\beta}$ erstattes med $\delta M^{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta}$ og da $\delta \varepsilon_{\alpha\beta}$ er født symmetrisk, kan $\delta N^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta}$ erstattes af $\delta S^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta}$. Vha. de konstitutive ligninger findes dermed

$$\begin{aligned} & \delta M_*^{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta} + \delta S_*^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} \\ &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left(a^{\alpha\rho} a^{\beta\mu} \delta \kappa_{\rho\mu} + \frac{\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} \delta \kappa_\gamma^\gamma \right) \delta \kappa_{\alpha\beta} + \frac{Eh}{1+\nu} \left(a^{\alpha\rho} a^{\beta\mu} \delta \varepsilon_{\rho\mu} + \frac{\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_\gamma^\gamma \right) \delta \varepsilon_{\alpha\beta} \\ &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left(\delta \kappa^{\rho\mu} \delta \kappa_{\rho\mu} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta \kappa_\alpha^\alpha \delta \kappa_\gamma^\gamma \right) + \frac{Eh}{1+\nu} \left(\delta \varepsilon^{\rho\mu} \delta \varepsilon_{\rho\mu} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta \varepsilon_\alpha^\alpha \delta \varepsilon_\gamma^\gamma \right) \end{aligned} \quad (7.11)$$

Variationerne $\delta^2 \kappa_{\alpha\beta}$ og $\delta^2 \varepsilon_{\alpha\beta}$ beregnes vha. formlerne udviklet i de tidligere afsnit.

Fra formel (4.33) haves

$$e^{\alpha\mu} \delta k_{\beta\alpha} = \frac{\partial(\delta\Phi)}{\partial u^\beta} \cdot \mathbf{a}^\mu \quad (7.12)$$

Multipliseres med $e_{\gamma\mu}$ fås

$$e^{\alpha\mu} e_{\gamma\mu} \delta k_{\beta\alpha} = e_{\gamma\mu} \frac{\partial(\delta\Phi)}{\partial u^\beta} \cdot \mathbf{a}^\mu \quad (7.13)$$

Da $e^{\alpha\mu} e_{\gamma\mu} = \delta_\gamma^\alpha$, jf. formel (2.35) og da $\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_\gamma = e_{\gamma\mu} \mathbf{a}^\mu$ jf. formel (2.40), fås følgende første variation af bøjningstensoren

$$\delta k_{\beta\gamma} = \frac{\partial(\delta\Phi)}{\partial u^\beta} \cdot (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_\gamma) \quad (7.14)$$

Med dette udtryk kan $\delta^2 k_{\alpha\beta}$ beregnes. Efter nogen regning findes

$$\delta^2 k_{\beta\gamma} = \delta \theta_{,\beta}^\alpha \delta \omega_{\gamma\alpha} - b_{\beta}^\rho e_{\rho\lambda} e_{\mu\gamma} \delta \theta^\lambda \delta \theta^\mu + \delta k_{\beta\delta} (\delta v_{,\gamma}^\delta - b_\gamma^\delta \delta w) \quad (7.15)$$

Iflg. formlerne (4.7) og (4.13) haves

$$\delta \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \delta a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta + \mathbf{a}_\alpha \cdot \delta \mathbf{a}_\beta) \quad (7.16)$$

der fører til at den anden variation af tøjningstensoren kan skrives

$$\delta^2 \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \delta^2 a_{\alpha\beta} = \delta \mathbf{a}_\alpha \cdot \delta \mathbf{a}_\beta \quad (7.17)$$

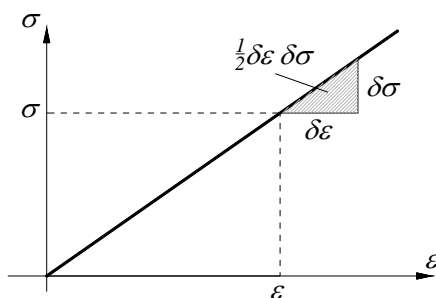
Vha. denne formel fås efter nogen regning

$$\begin{aligned} \delta^2 \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{\partial(\delta w)}{\partial u^\alpha} \frac{\partial(\delta w)}{\partial u^\beta} + \delta v_{,\alpha}^\gamma \delta v_{,\beta}^\gamma + \left(b_\beta^\lambda \frac{\partial(\delta w)}{\partial u^\alpha} + b_\alpha^\lambda \frac{\partial(\delta w)}{\partial u^\beta} \right) \delta v_\lambda \\ &\quad - \left(b_{\gamma\beta} \delta v_{,\alpha}^\gamma + b_{\gamma\alpha} \delta v_{,\beta}^\gamma \right) \delta w + b_{\alpha\gamma} b_\beta^\gamma (\delta w)^2 + b_\alpha^\gamma b_\beta^\lambda \delta v_\gamma \delta v_\lambda \end{aligned} \quad (7.18)$$

Herved er samtlige led i (7.9) er bestemt.

Til de enkelte led i (7.9) tilføjes følgende uddybende kommentarer.

Leddene $\delta M_*^{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta} = \delta M_*^{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta}$ og $\delta N_*^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} = \delta S_*^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta}$ er bundet sammen via de konstitutive ligninger. De beskriver andenordens tillægget til den elastiske energi. Deres fysiske betydning kan forstås ved at se på Hookes lov for en enakset trækspænding σ som funktion af en længdetøjning ε , hvor $\sigma = E\varepsilon$. En tilvækst $\delta\varepsilon$ giver en tilvækst $\delta\sigma = E\delta\varepsilon$. Den elastiske energi pr. volumenenhed svarer til arealet under kurven for σ som funktion af ε . Tilvæksten i energi, når ε får en tilvækst $\delta\varepsilon$, bliver derfor det skraverede areal i Figur 7.1, svarende til $\frac{1}{2}\delta\sigma\delta\varepsilon$. De nævnte led i (7.9) kan på tilsvarende måde vises at være det dobbelte af andenordens tilvæksterne i elastisk energi.



Figur 7.1 – Andenordens bidrag til tilvækst i elastisk energi

Vedr. bestemmelse af elastisk energi i fleraksede tilfælde henvises til allerede nævnte referencer.

Betragt dernæst leddene i (7.9) med formen $N_*^{\alpha\beta} \delta^2 \varepsilon_{\alpha\beta}$. Når (7.9) anvendes på en plade med udbøjningen δw på tværs, fås i (7.17) kun bidrag fra leddene $\frac{\partial(\delta w)}{\partial u^\alpha} \frac{\partial(\delta w)}{\partial u^\beta}$, hvilket netop er de led, der optræder i Bryans ligning, se (Bryan, 1891).

7.2 Bestemmelse af kritisk belastning vha. stabilitetskriteriet

I det følgende vil det blive beskrevet hvordan der er muligt med energimetoden at finde grænseværdier og tilnærmede løsninger, hvilket kan være meget simplere end at finde eksakte løsninger.

Stabilitetskriteriet i (7.10), $\delta^2 A > 0$, skrives ofte på formen

$$P = \delta^2 A = P_1 - P_2 > 0 \quad (7.19)$$

hvor, jf. formel (7.9),

$$P_1 = \int_{F_0} (\delta M_*^{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta} + \delta S_*^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta}) dF_0 \quad (7.20)$$

$$P_2 = - \int_{F_0} (M_*^{\alpha\beta} \delta^2 \kappa_{\alpha\beta} + S_*^{\alpha\beta} \delta^2 \varepsilon_{\alpha\beta}) dF_0 \quad (7.21)$$

Igen indføres $\delta\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\delta k_{\alpha\beta} + \delta k_{\beta\alpha})$ i stedet for $\delta k_{\alpha\beta}$ og $S_*^{\alpha\beta}$ i stedet for $N_*^{\alpha\beta}$.

Er $P_1 > P_2$ for enhver geometrisk mulig flytningstilstand, haves en stabil ligevægtstilstand. Er $P_1 = P_2$ for en eller flere geometriske flytningstilstande må højerordens led inddrages for at afgøre om ligevægtstilstanden er stabil. Er $P_1 < P_2$ for mindst én mulig geometrisk flytningstilstand er ligevægtstilstanden ustabil.

Da leddene af typen $\delta M_*^{\alpha\beta} \delta k_{\alpha\beta} = \delta M_*^{\alpha\beta} \delta\kappa_{\alpha\beta}$ og $\delta N_*^{\alpha\beta} \delta\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta S_*^{\alpha\beta} \delta\varepsilon_{\alpha\beta}$ i (7.20) og dermed P_1 altid er positive eller nul og kun nul når deformationsstørrelserne $\delta\kappa_{\alpha\beta}$ og $\delta\varepsilon_{\alpha\beta}$ er nul (positive definitte størrelser) skal P_2 være positiv for at få $P < 0$ og dermed en ustabil ligevægtstilstand. Dette kan fx ske ved at $S_*^{\alpha\beta}$ repræsenterer en spændingstilstand med trykkræfter. Trykkræfter i konstruktioner er som bekendt den mest almindelige grund til instabilitet.

En praktisk anvendelse af stabilitetskriteriet er det tilfælde, hvor spændingstilstanden hvis stabilitet ønskes undersøgt kan regnes proportional med én parameter $\eta > 0$. Denne forudsætning kan ofte regnes opfyldt i det område af η , hvor konstruktionen er stabil og hvor de flytninger konstruktionen får ved voksende værdier af η er små, dvs. at den lineære teori gælder med god tilnærmelse.

Betragtes en spændingstilstand i udgangssituationen med $M_*^{\alpha\beta} = \eta M_{*0}^{\alpha\beta}$ og $N_*^{\alpha\beta} = \eta S_{*0}^{\alpha\beta}$. Bemærk at for passende små værdier af η er $P > 0$, idet $P_1 > 0$, når den betragtede geometriske mulige flytningstilstand har flytningsstørrelser $\neq 0$. I dette tilfælde kan stabilitetskriteriet skrives

$$P = \int_{F_0} \left[\frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left(\delta\kappa^{\rho\mu} \delta\kappa_{\rho\mu} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta\kappa_{\alpha}^{\alpha} \delta\kappa_{\gamma}^{\gamma} \right) + \frac{Eh}{1+\nu} \left(\delta\varepsilon^{\rho\mu} \delta\varepsilon_{\rho\mu} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta\varepsilon_{\alpha}^{\alpha} \delta\varepsilon_{\gamma}^{\gamma} \right) \right] dF_0 \\ + \eta \int_{F_0} (M_{*0}^{\alpha\beta} \delta^2 \kappa_{\alpha\beta} + S_{*0}^{\alpha\beta} \delta^2 \varepsilon_{\alpha\beta}) dF_0 > 0 \quad (7.22)$$

eller

$$\eta < \frac{\int_{F_0} \left[\frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left(\delta\kappa^{\rho\mu} \delta\kappa_{\rho\mu} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta\kappa_{\alpha}^{\alpha} \delta\kappa_{\gamma}^{\gamma} \right) + \frac{Eh}{1+\nu} \left(\delta\varepsilon^{\rho\mu} \delta\varepsilon_{\rho\mu} + \frac{\nu}{1-\nu} \delta\varepsilon_{\alpha}^{\alpha} \delta\varepsilon_{\gamma}^{\gamma} \right) \right] dF_0}{-\int_{F_0} (M_{*0}^{\alpha\beta} \delta^2 \kappa_{\alpha\beta} + S_{*0}^{\alpha\beta} \delta^2 \varepsilon_{\alpha\beta}) dF_0} \quad (7.23)$$

Kvotienten på højresiden er analog til Rayleighs brøk introduceret til løsning af egenværdproblemer i svingningsteorien, se fx (Bažant & Cedolin, 1991). Dette betyder, at kvotienten er en øvre værdi.

Dette betyder, at hvis der indsættes en vilkårlig skønnet geometrisk mulig flytningstilstand i højresiden af (7.23), som giver værdien η_θ vil en infinitesimal forøgelse af den til η_θ svarende belastning med sikkerhed gøre konstruktionen ustabil.

Den mindste værdi af kvotienten på højre side af (7.23) kan bestemmes ved variationsregningens metoder. Findes en løsning til variationsproblemet og er kvotientens værdi < 1 er ligevægtstilstanden ustabil, idet $P < 0$. Ligevægtstilstanden er stabil, hvis den mindste værdi af kvotienten er > 1 .

Er den mindste værdi af kvotienten 1, er $P = 0$ og højerordens led må medtages. Fra et praktisk synspunkt er der dog ingen grund til at udføre en sådan undersøgelse, da en nok så lille forøgelse af belastningen vil medføre, at ligevægtstilstanden bliver ustabil. En belastning der giver at kvotienten på højre siden af (7.23) bliver 1 og altså $P = 0$ kaldes en kritisk belastning.

Tilnærmede værdier af den kritiske belastning kan bestemmes ved at skønne en geometrisk mulig flytningstilstand, der er en funktion af nogle frie parametre. Derefter bestemmes den mindste værdi af kvotienten på højre side i (7.23) ved at minimere mht. til de frie parametre hvorved det bedste resultat, der kan opnås vha. den skønnede geometrisk mulige flytningstilstand findes.

Undersøges det om der for en belastning, karakteriseret ved parameteren η , findes nærliggende ligevægtsløsninger uden at belastningen ændres, gælder det, at den mindste værdi af $\eta = \eta_{min}$ for hvilken ligevægtsligningerne og randbetingelserne i en naboligevægtstilstand er opfyldte er den samme værdi, som findes ved at minimere kvotienten på højre side i (7.23).

Beviset for denne sætning vil ikke blive givet her. Der henvises til (Nielsen, 1968), hvor beviset er gennemført for den generelle tredimensionale teori.

8 Tilnærmet ikke-lineær teori, imperfekte skaller

Da bæreevnen af skalkonstruktioner, som tidligere nævnt, ofte er stærkt afhængig af imperfektioner i form af geometriske afvigelser mellem den forudsatte perfekte form og den virkelige form, kan den i det foregående udviklede klassiske stabilitetsteori ofte ikke benyttes i praksis.

En korrekt behandling under hensyntagen til imperfektioner kræver, at der haves en fuldstændig ikke-lineær teori til rådighed. Et eksempel på en sådanne er udviklet af Sanders (Sanders, 1963). Den er kort omtalt i (Nielsen, 2004), se afsnit 10.

Korrekte teorier fører til ekstremt komplicerede beregninger. Dertil kommer at der kun sjældent er kendskab til den virkelige skalform. Derfor må man ofte nøjes med at anvende en tilnærmet teori, der kun medtager de allervigtigste virkninger. En sådan tilnærmet teori er beskrevet kort i det følgende. Teorien er en videreudvikling af den i det foregående beskrevne lineære teori og lineære stabilitetsteori.

8.1 Tilnærmet ikke-lineær teori

Den i det følgende formulerede ikke-lineære teori er analog til den klassiske behandling af søjler, bjælkesøjler, skiver og plader.

En nærliggende forudsætning kan være at regne sammenhængen mellem flytnings- og deformationstørrelser bestemt af den lineære teori. Her forudsættes små flytninger. Det betyder, at flytningsgradienterne og rotationerne er små, således at kvadratiske led i form af produkter der indeholder flytningsgradienter og rotationer kan negligeres.

En sådan teori, vil imidlertid kun give korrekte resultater, hvis flytningerne på tværs er meget mindre end skaltykkelsen, analogt med hvad der gælder i de fleste pladeteorier.

I skalteorien haves ofte udbøjninger på tværs, der er af samme størrelsesorden som skaltykkelsen eller mere. I så fald må andenordensled medtages. Dette gøres ved til de lineære led at medtage ledende hhv. $\frac{1}{2}\delta^2 k_{\alpha\beta}$ og $\frac{1}{2}\delta^2 \varepsilon_{\alpha\beta}$, se formel (7.15) og (7.18). Herved fås de samlede tilvækster fra første- og andenordensled

$$\Delta \varepsilon_{\alpha\beta} = \delta \varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \delta^2 \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (8.1)$$

$$\Delta k_{\alpha\beta} = \delta k_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \delta^2 k_{\alpha\beta} \quad (8.2)$$

Ofte er det kun nødvendigt at medtage leddet $\frac{\partial(\delta w)}{\partial u^\alpha} \frac{\partial(\delta w)}{\partial u^\beta}$ i (7.18) mens alle led i $\delta^2 k_{\alpha\beta}$ i (7.15) negligeres. Dette er bl.a. i overensstemmelse med (Flügge, 1973).

Som konstitutive ligninger for et lineærelastisk materiale benyttes (6.27) og (6.28), idet $\Delta\varepsilon_{\alpha\beta}$ og $\Delta k_{\alpha\beta}$ nu indsættes. Herved bliver

$$\delta M_*^{\alpha\beta} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \left(a^{\alpha\rho} a^{\beta\mu} \Delta k_{\rho\mu} + \frac{\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} \Delta k_{\gamma}^{\gamma} \right) \quad (8.3)$$

$$\delta S_*^{\alpha\beta} = \frac{Eh}{1+\nu} \left(a^{\alpha\rho} a^{\beta\mu} \Delta\varepsilon_{\rho\mu} + \frac{\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} \Delta\varepsilon_{\gamma}^{\gamma} \right) \quad (8.4)$$

Den snitkrafttilstand der bestemmes vha. lineær teori, hvor ligevægtsligningerne og statiske randbetingelser opstilles uden hensyntagen til deformationerne, betegnes med et indeks 0. Bøjningsmomenterne betegnes derfor $M_{*0}^{\alpha\beta}$, normalkræfterne $N_{*0}^{\alpha\beta}$, forskydningskræfterne Q_{*0}^{α} osv. De flytninger og deformationer der bestemmes vha. lineær teori, og som svarer til snitkræfterne med indeks 0 negligeres i de følgende beregninger.

8.2 Imperfektioner

Herefter antages at den iht. lineær teori beregnede skalkonstruktion undergår en flytnings- og deformationstilstand. Flytningerne opdeles i to bidrag, ét bidrag der betegnes med indeks *imp*, som nu svarer til skallens imperfektion, og ét bidrag der beskriver de flytninger, som skallen får ud over imperfektionerne. Dette bidrag betegnes med indeks *til*. Altså

$$\delta v^{\alpha} = \delta v_{imp}^{\alpha} + \delta v_{til}^{\alpha} \quad \delta w = \delta w_{imp} + \delta w_{til} \quad (8.5)$$

Ideen i tilnærmelsesberegningen er nu den, at størrelser som i det foregående blev betegnet som $\delta M_*^{\alpha\beta}$, $\delta N_*^{\alpha\beta}$ mv. beregnes vha. de konstitutive ligninger med deformationsstørrelser svarende til flytningerne δv_{til}^{α} og δw_{til} , dvs. flytningerne ud over imperfektionerne. Ligevægten i den deformerede tilstand svarende til flytningerne $\delta v^{\alpha} = \delta v_{imp}^{\alpha} + \delta v_{til}^{\alpha}$ og $\delta w = \delta w_{imp} + \delta w_{til}$ beskrives tilnærmeth vha. ligevægtsligningerne for en nærliggende ligevægtstilstand, formel (4.76) og (4.77), samt randbetingelserne, formel (5.69) til (5.72). De flytningsstørrelser der indgår i disse ligninger beregnes naturligvis for flytningerne $\delta v^{\alpha} = \delta v_{imp}^{\alpha} + \delta v_{til}^{\alpha}$ og $\delta w = \delta w_{imp} + \delta w_{til}$. De snitkraftstørrelser der indgår i disse ligninger sættes lig med $M_{*0}^{\alpha\beta}$, $N_{*0}^{\alpha\beta}$, Q_{*0}^{α} osv.

DEL 2

AKSIALT BELASTET CIRKULÆR CYLINDERSKAL

DEL 2

9 Introduktion

I det følgende gives, på baggrund af ovenstående udledninger, en behandling af stabilitetsbestemmelse for den cirkulære cylinderskal. Cylinderskallen antages at have en konstant tykkelse, h , og at være udført af et homogent og isotropt, lineærelastisk materiale med elasticitetskoeficienten E og Poissons forhold ν . Cylinderen har radius R , målt til skalmidterfladen, og længden, L .

Skallen antages kun at være belastet i længderetningen med en død vægt P , som beholder sin størrelse og retning. Lasten antages at være jævnt fordelt tryk således at normalkraften pr. længdeenhed og normalspændingen dermed bliver

$$N_x = \frac{-P}{2\pi R} \qquad \sigma_x = \frac{N_x}{h} \qquad (9.1)$$

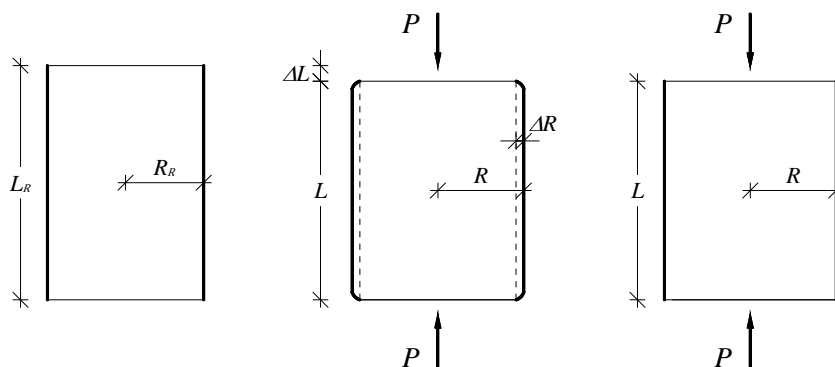
Skallen vil dels blive undersøgt for førsteordens flytninger og dels andenordens flytninger, hvor også imperfektioner medtages. Dermed vil den udledte teori blive testet imod den klassiske lineære kritiske last samt dens evne til at håndtere geometriske imperfektioner ved en ikke-lineær beregning. Alle beregninger vil blive gjort for et lineærelastisk materiale, og der vil derfor ikke blive taget hensyn til plasticitet.

Af ligevægtsligningerne i naboltilstanden, som udviklet i afsnit 4, fremgår det at andenordens effekter af formen Nu indgår. Dette vil naturligvis tydeligere fremgå, når disse ligninger udskrives for det aktuelle tilfælde. Når betegnelsen "lineær" bruges i det følgende, er det i betydning forklaret i afsnit 1.3.

I det følgende vil der ikke blive taget hensyn til før-foldnings deformationer, som for den geometrisk perfekte cylinderskal vil opstå nær randene. I normale konstruktioner og ved forsøg er skallens ender forbundet til relativt stive endeplader, og aksesymmetriske bøjningsdeformationer vil opstå nær skallens rande, når den belastes aksialt, se Figur 9.1. Når der ses bort fra før-foldnings deformationer vil arbejdslinjen for den perfekte skal vil være ret op til bifurkationspunktet.

Denne måde at betragte en cylinderskal på vil være rigtig for uendelig lange slanke skaller med friktionsløse understøtninger, og hvis Poisson-forholdet er lig med nul. Der henvises fx til (Yamaki, 1984), hvor en udførlig undersøgelse er udført.

Før-foldnings deformationer tages heller ikke i regning, når imperfektionernes betydning undersøges. Således er den skal som undersøges mht. imperfektioner, den samme skal som undersøges for lineære flytninger, se Figur 9.1, naturligvis med et tillæg for imperfektioner, se afsnit 8.



Figur 9.1 – Aksialt belastet cirkulær cylinder. Tv. Ubelastet cylindrerskal. Mf. Deformationer pga. Poissons forhold. Th. Skal som undersøges mht. stabilitet

For randbetingelserne vælges et sæt, som leder til det den klassiske kritiske aksiale belastning, se (1.17). Disse svarer til fastholdelse mod flytninger i tangentretningen og i radialretningen i begge ender og naturligvis fastholdelse mod aksiale flytninger i den modsatte ende af skallen ift. den påførte belastning. Med randbetingelser forstås her de fastholdelser, som kræves efter før-foldnings deformationerne.

For at finde den "rigtige" skal må der strengt taget regnes tilbage, når en løsning til ligningerne er fundet. Størrelserne ΔL og ΔR (numeriske størrelser) betegner ændringerne i hhv. L_R og R_R ved aksialsammentrykning af skallen. Idet $L = L_R - \Delta L$, $O = O_R + \Delta O \Leftrightarrow R = R_R + \Delta R$, hvor O betegner omkredsen fås

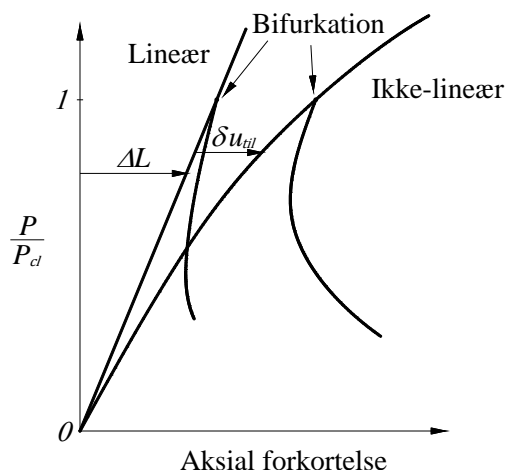
$$\Delta L = \varepsilon_x L_R = \frac{\sigma_x}{E} L_R \approx 0,605 \frac{\sigma_x}{\sigma_{cl}} \frac{h}{R} L_R \quad (9.2)$$

$$\Delta R = \nu \varepsilon_x R_R \approx 0,182 \frac{\sigma_x}{\sigma_{cl}} \frac{h}{R} L_R \quad (9.3)$$

hvor ε_x og σ_x her betyder de numeriske værdier af hhv. tøjning og normalspænding.

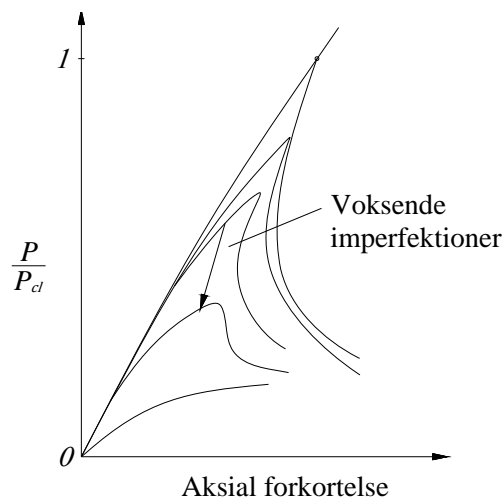
I (9.2) og (9.3) er den klassiske kritiske elastiske spænding fra (1.17) indført, og ν er valgt til 0,3. Det ses altså tydeligt, at så længe h/R forholdet er lille, bliver forskellen mellem den "rigtige" skal og skallen, som beregnes lille. Det bemærkes at σ_{cl} er defineret positiv for en trykspænding, mens normalspændinger i afhandlingen regnes positive som træk.

Til trods for at teorien for skaller i nærværende afhandling er forsøgt gjort så simpel som mulig, er det stadig en kompleks teori med tre koblede ligevægtsligninger og tre flytningsstørrelser i ethvert punkt. Derfor er det nødvendigt at diskretisere problemstillingen og løse den numerisk. Til dette eksisterer der hoveddagligt to metoder; elementmetoden og differensmetoden. I denne afhandling er differensmetoden valgt.



Figur 9.2 – Skematisk arbejdskurve for perfekt cirkulær cylinderskal under aksial belastning.

I Figur 9.2 er arbejdskurverne for lineære og ikke-lineære ligevægtsløsninger vist skematisk for en perfekt skal. I figuren betegner P_{cl} den klassiske kritiske last. Figuren illustrerer, at en lineær foldningsanalyse kan benyttes til at bestemme bifurkationspunkter, altså et punkt hvor et nyt eller flere nye deformationsmønstre bliver mulige. Ved at medtage ikke-lineære flytninger bliver det muligt at bestemme nærliggende ligevægtstilstande op til bifurkationspunktet. Forskellen mellem de to kurver i Figur 9.2 er overdrevet, og tillægssflytningen δu_{til} vil for den perfekte skal være meget mindre end ΔL .



Figur 9.3 – Betydning af imperfektioner i radiær retning

I Figur 9.3 er den forventede betydning af imperfektioner vist skematisk for voksende imperfektionsamplituder. Med imperfektioner vil de tillægssflytninger, som haves i en nærliggende ligevægtstilstand, vokse i takt med, at imperfektionsamplituden øges.

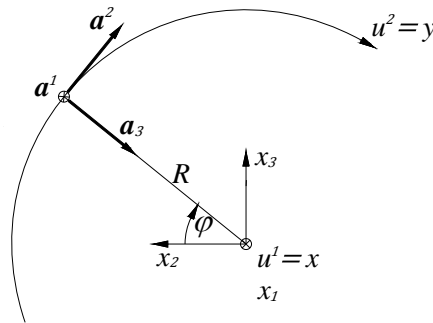
9.1.1 Metrik

Skallens midterflade, cylinderfladen, beskrives ved at translaterer en kurve i planen, frembringerkurven, i en given retning, frembringerretningen. For en cirkulær cylindreskal er frembringerkurven naturligvis en cirkel.

Ved indlæggelse af et polært koordinatsystem kan den cirkulære frembringerkurve beskrives vha. radius R , og vinklen φ , se Figur 9.4. Frembringerretningen defineres som x -aksen. For en cylinder er frembringerretningen naturligvis vinkelret på frembringerkurven og betegnes her længderetningen. Koordinatkurverne bliver dermed

$$u^1 = x \quad u^2 = R\varphi = y \quad (9.4)$$

I Figur 9.4 er også vist den positive omløbsretning, som er bestemmende for den positive retning af fladenormalen.



Figur 9.4 – Koordinatkurver for cirkulær cylindreskal

Et globalt kartesisk koordinatsystem indlægges således at stedvektorens koordinater bliver

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

For de valgte koordinatkurver bestemmes de geometriske parametre som beskrevet i afsnit 2.

De kovariante basisvektorer og fladenormalen bestemt efter (2.2) bliver

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} \quad (9.6)$$

Det ses, at \mathbf{a}_3 , som er en enhedsvektor i fladenormalens retning, peger mod centrum af frembringerkurven.

Den metriske tensors komponenter og de kontravariante basisvektorer bliver jf. (2.4) og (2.6)

$$a_{11} = 1 \quad a_{22} = 1 \quad a_{12} = 0 \quad (9.7)$$

$$\mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

Komponenterne for den kovariante og den blandede krumningstensor bestemt efter (2.42) bliver

$$b_{11} = 0 \quad b_{22} = \frac{1}{R} \quad b_{12} = b_{21} = 0 \quad (9.9)$$

$$b_1^1 = 0 \quad b_2^2 = \frac{1}{R} \quad b_2^1 = b_1^2 = 0 \quad (9.10)$$

Dermed ses det, jf. (2.59), at Christoffel-symbolet af 2. art i alle kombinationer er lig med nul for den cirkulære cylinderskal. Dette ville ikke være tilfældet, hvis der i stedet for ovenstående flade teori arbejdes med en tredimensional teori.

At Christoffel-symbolet af 2. art er lig med nul i alle kombinationer er yderst bekvemt, da de kovariante afledede dermed kan bestemmes ved alm. partiel differentiation jf. (2.70).

Til slut bestemmes permutationstensoren efter (2.32)

$$e_{12} = -e_{21} = \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = 1 \quad (9.11)$$

9.1.2 Fysiske komponenter

I det forudgående er ligninger opskrevet i et vilkårligt skævvinklet koordinatsystem, hvor basisvektorerne ikke behøver at være enhedsvektorer. Disse ligninger giver en mere umiddelbar fysisk forståelse, når de opskrives med fysiske komponenter af tensorerne, altså de komponenter der haves, når der bruges enhedsbasisvektorer. Med de valgte koordinater bliver de fysiske komponenter defineret i et lokalt retvinklet koordinatsystem.

Koordinatkurverne er vinkelrette på hinanden ($a_{12} = 0$), og omskrivningen til fysiske komponenter er let gjort jf. (Nielsen, 2004) afsnit 6.

For de fysiske komponenter benyttes i det følgende indeks x og y i stedet for 1 og 2.

For deformationsmålene gælder for de fysiske komponenter (her eksemplificeret ved tøjningerne)

$$\delta \varepsilon_x = \frac{\delta \varepsilon_{11}}{a_{11}} = \delta \varepsilon_{11} \quad (9.12)$$

$$\delta \varepsilon_y = \frac{\delta \varepsilon_{22}}{a_{22}} = \delta \varepsilon_{22} \quad (9.13)$$

$$\delta\varepsilon_{xy} = \frac{\delta\varepsilon_{12}}{\sqrt{a_{11} a_{22}}} = \delta\varepsilon_{12} \quad (9.14)$$

For normalkrafttensoren og momenttensoren gælder for de fysiske komponenter (her eksemplificeret ved normalkræfterne)

$$\delta S_x = a_{11} \delta S^{11} = \delta S^{11} \quad (9.15)$$

$$\delta S_y = a_{22} \delta S^{22} = \delta S^{22} \quad (9.16)$$

$$\delta S_{xy} = \sqrt{a_{11} a_{22}} \delta S^{12} = \delta S^{12} \quad (9.17)$$

Derudover gælder følgende sammenhæng mellem flytningerne

$$\delta v_x = \frac{\delta v_1}{\sqrt{a_{11}}} = \delta v^1 \sqrt{a_{11}} \Leftrightarrow \delta v_x = \delta v_1 = \delta v^1 \quad (9.18)$$

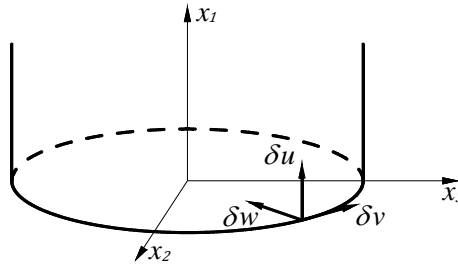
$$\delta v_y = \frac{\delta v_2}{\sqrt{a_{22}}} = \delta v^2 \sqrt{a_{22}} \Leftrightarrow \delta v_y = \delta v_2 = \delta v^2 \quad (9.19)$$

Samtidigt benyttes lejligheden til at omdøbe flytningerne, hhv. flytningen i længderetningen og i tangentreningen, til de typisk brugte betegnelser

$$\delta u = \delta v_x \quad (9.20)$$

$$\delta v = \delta v_y \quad (9.21)$$

Idet flytningen i fladenormalens retning betegnes δw , er flytningen af et vilkårligt punkt på skalmidterfladen dermed opløst efter et lokalt retvinklet koordinatsystem og er betegnet med δu , δv og δw , se Figur 9.5.



Figur 9.5 – Flytningsvektorer

9.1.3 Deformationer og konstitutive ligninger

For den cirkulære cylindriskal er de fysiske komponenter af tøjningstensoren (4.13) og den symmetriske del af bøjningstensoren (4.35) udtrykt ved flytningerne bestemt ved

$$\delta\varepsilon_x = \frac{\partial\delta u}{\partial x} \quad (9.22)$$

$$\delta\varepsilon_y = \frac{\partial\delta v}{\partial y} - \frac{\delta w}{R} \quad (9.23)$$

$$\delta\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\delta u}{\partial y} + \frac{\partial\delta v}{\partial x} \right) \quad (9.24)$$

$$\delta\kappa_x = -\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2} \quad (9.25)$$

$$\delta\kappa_y = -\left(\frac{1}{R} \frac{\partial\delta v}{\partial y} + \frac{\partial^2\delta w}{\partial y^2} \right) \quad (9.26)$$

$$\delta\kappa_{xy} = \frac{1}{4R} \frac{\partial\delta u}{\partial y} - \frac{3}{4R} \frac{\partial\delta v}{\partial x} - \frac{\partial^2\delta w}{\partial x\partial y} \quad (9.27)$$

Ønskes at medtage ikke-lineære flytninger, kan andenordens bidrag til tøjningerne jf. afsnit 8.1 medtages. I afsnit 8.1 er det forudsat, at alle andenordens tillæg til bøjningstensen kan negligeres, og at det kun er nødvendigt at medtage et enkelt led i andenordenstillæggene til tøjningerne. For den cirkulære cylindreskal medtages således kun leDET $\frac{\partial(\delta w)}{\partial u^\alpha} \frac{\partial(\delta w)}{\partial u^\beta}$. Herved fås

$$\Delta\varepsilon_x = \frac{\partial\delta u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\delta w}{\partial x} \right)^2 \quad (9.28)$$

$$\Delta\varepsilon_y = \frac{\partial\delta v}{\partial y} - \frac{\delta w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\delta w}{\partial y} \right)^2 \quad (9.29)$$

$$\Delta\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\delta u}{\partial y} + \frac{\partial\delta v}{\partial x} + \frac{\partial\delta w}{\partial x} \frac{\partial\delta w}{\partial y} \right) \quad (9.30)$$

De konstitutive ligninger bliver når indflydelsen af skallens krumning negligeres, jf. (6.27) og (6.28).

$$\delta S_x^* = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\Delta\varepsilon_x + \nu\Delta\varepsilon_y) = D_a \left[\frac{\partial\delta u}{\partial x} + \nu \frac{\partial\delta v}{\partial y} - \nu \frac{\delta w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\delta w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial\delta w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (9.31)$$

$$\delta S_y^* = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\nu\Delta\varepsilon_x + \Delta\varepsilon_y) = D_a \left[\nu \frac{\partial\delta u}{\partial x} + \frac{\partial\delta v}{\partial y} - \frac{\delta w}{R} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial\delta w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\delta w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (9.32)$$

$$\delta S_{xy}^* = \frac{Eh}{1+\nu} \Delta\varepsilon_{xy} = D_a \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial\delta u}{\partial y} + \frac{\partial\delta v}{\partial x} + \frac{\partial\delta w}{\partial x} \frac{\partial\delta w}{\partial y} \right) \quad (9.33)$$

$$\delta M_x^* = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\delta\kappa_x + \nu\delta\kappa_y) = -D_b \left(\frac{\nu}{R} \frac{\partial\delta v}{\partial y} + \frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2\delta w}{\partial y^2} \right) \quad (9.34)$$

$$\delta M_y^* = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\nu\delta\kappa_x + \delta\kappa_y) = -D_b \left(\frac{1}{R} \frac{\partial\delta v}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\delta w}{\partial y^2} \right) \quad (9.35)$$

$$\delta M_{xy}^* = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \delta\kappa_{xy} = D_b(1-\nu) \left(\frac{1}{4R} \frac{\partial\delta u}{\partial y} - \frac{3}{4R} \frac{\partial\delta v}{\partial x} - \frac{\partial^2\delta w}{\partial x\partial y} \right) \quad (9.36)$$

Her er følgende stivhedsbetegnelser for hhv. aksial- og bøjningsstivhed, D_a og D_b indført

$$D_a = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad D_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (9.37)$$

9.1.4 Ligevægtsligninger

De lineære ligevægtsligninger uden hensyntagen til deformationerne bliver for en aksialt belastet cylinderskal jf. (3.32) og (3.33)

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{2R} \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (9.38)$$

$$\frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{3}{2R} \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (9.39)$$

$$\frac{1}{R} S_y + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = 0 \quad (9.40)$$

Disse ligninger er identiske med Sanders (Sanders, 1963).

9.2 Ligevægtsligninger for nærliggende ligevægtstilstande

De tre ligevægtsligninger for en nærliggende ligevægtstilstand, (4.76) og (4.77), bliver for den aksialt belastede cirkulære cylinderskal

$$\frac{\partial \delta S_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \delta S_{xy}^*}{\partial y} + \frac{1}{2R} \frac{\partial \delta M_{xy}^*}{\partial y} + S_x^* \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} = 0 \quad (9.41)$$

$$\frac{\partial \delta S_y^*}{\partial y} + \frac{\partial \delta S_{xy}^*}{\partial x} - \frac{3}{2R} \frac{\partial \delta M_{xy}^*}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial \delta M_y^*}{\partial y} + S_x^* \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} = 0 \quad (9.42)$$

$$\frac{1}{R} \delta S_y^* + \frac{\partial^2 \delta M_x^*}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \delta M_{xy}^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta M_y^*}{\partial y^2} + S_x^* \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} = 0 \quad (9.43)$$

9.2.1 Ligevægtsligninger i lineær stabilitetsteori

Ses der i første omgang bort fra andenordens størrelserne, kan ligevægtsligningerne i den lineære stabilitetsteori, udtrykt ved flytningerne opskrives, når samtidigt belastningsledet flyttes over på højre side af lighedstegnet.

$$D_a \left[\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x \partial y} - \nu \frac{1}{R} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right] + \frac{D_b}{R^2} \left[\frac{1-\nu}{8} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial y^2} - \frac{3(1-\nu)}{8} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x \partial y} - \frac{1-\nu}{2} R \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x \partial y^2} \right] = -N_x \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} \quad (9.44)$$

$$D_a \left[\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right] + \frac{D_b}{R^2} \left[\frac{9(1-\nu)}{8} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} - \frac{3(1-\nu)}{8} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta v}{\partial y^2} + \frac{3-\nu}{2} R \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^2 \partial y} + R \frac{\partial^3 \delta w}{\partial y^3} \right] = -N_x \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} \quad (9.45)$$

$$D_a \left[\frac{\nu}{R} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta v}{\partial y} - \frac{\delta w}{R^2} \right] + D_b \left[-\frac{\partial^4 \delta w}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^4 \delta w}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^4 \delta w}{\partial y^4} + \frac{1-\nu}{2R} \frac{\partial^3 \delta u}{\partial x \partial y^2} - \frac{3-\nu}{2R} \frac{\partial^3 \delta v}{\partial x^2 \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial^3 \delta v}{\partial y^3} \right] = -N_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \quad (9.46)$$

Sammenlignes disse ligninger med Flügges eller Sanders ligninger, jf. (Flügge, 1960) og (Sanders, 1963), ses det, at ovenstående ligninger, som er udviklet på en helt anden måde, stort set er identiske med de nævnte ligninger.

Hvad angår Flügges ligninger er der overensstemmelse med de led, der multipliceres med den aksiale stivhed samt belastningsleddene, mens der er små uoverensstemmelser i de led, der multipliceres med bøjningsstivheden.

Sanders ligninger er noget sværere at sammenligne med, da hans teori for stabilitet er udviklet ud fra en fuldstændig andenordens teori, hvor ligevægt er opskrevet med hensyntagen til deformationer. Benyttes Yamakis gengivelse af Sanders ligninger, jf. (Yamaki, 1984), ses, at både leddene der er faktorer på aksialstivheden, og leddene der er faktorer på bøjningsstivheden er identiske med nærværende teori, når der ses bort fra leddene hidrørende fra før-foldning. Belastningsleddene er forskellige, da Sanders her har indarbejdet bidrag fra den ikke-lineære teori, der leder til andre andenordenseffekter (Nu -led).

En yderligere simpel kontrol er at lade $R \rightarrow \infty$, hvorved differentialligningen for en søjle under hensyntagen til udbøjningerne skal fremkomme. Idet $\frac{1}{R} \rightarrow 0$ når $R \rightarrow \infty$ fås af (9.46)

$$-D_b \frac{\partial^4 \delta w}{\partial x^4} + N_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} = 0 \quad (9.47)$$

som netop er søjlens ligevægtsligning.

9.2.2 Ligevægtsligninger i ikke-lineær stabilitetsteori

Medtages ikke-lineære flytnings-tøjnings relationer i (9.28) til (9.30) fås følgende tre tillæg til venstresiderne af de lineære ligevægtsligninger (9.44) til (9.46)

$$D_a \left[\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right)^2 \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right)}{\partial y} \right] \quad (9.48)$$

$$D_a \left[\frac{\partial \left(\frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right)^2 \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right)}{\partial x} \right] \quad (9.49)$$

$$\frac{D_a}{R} \left[\frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (9.50)$$

Dermed bliver ligevægtsligningerne for den ikke-lineære stabilitetsteori

$$\begin{aligned}
 & D_a \left[\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x \partial y} - \nu \frac{1}{R} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right] \\
 & + D_a \left[\frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial \delta w}{\partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + \frac{\partial \delta w}{\partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) \right] \\
 & + \frac{D_b}{R^2} \left[\frac{1-\nu}{8} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial y^2} - \frac{3(1-\nu)}{8} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x \partial y} - \frac{1-\nu}{2} R \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x \partial y^2} \right] = -N_x \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2}
 \end{aligned} \tag{9.51}$$

$$\begin{aligned}
 & D_a \left[\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right] \\
 & + D_a \left[\nu \frac{\partial \delta w}{\partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) \right] \\
 & + \frac{D_b}{R^2} \left[\frac{9(1-\nu)}{8} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} - \frac{3(1-\nu)}{8} \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta v}{\partial y^2} + \frac{3-\nu}{2} R \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^2 \partial y} + R \frac{\partial^3 \delta w}{\partial y^3} \right] = -N_x \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2}
 \end{aligned} \tag{9.52}$$

$$\begin{aligned}
 & D_a \left[\frac{\nu}{R} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta v}{\partial y} - \frac{\delta w}{R^2} \right] + D_a \left[\frac{\nu}{2R} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2R} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right)^2 \right] \\
 & + D_b \left[-\frac{\partial^4 \delta w}{\partial x^4} - 2 \frac{\partial^4 \delta w}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^4 \delta w}{\partial y^4} + \frac{1-\nu}{2R} \frac{\partial^3 \delta u}{\partial x \partial y^2} - \frac{3-\nu}{2R} \frac{\partial^3 \delta v}{\partial x^2 \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial^3 \delta v}{\partial y} \right] = -N_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}
 \end{aligned} \tag{9.53}$$

9.3 Randbetingelser

Den beskrevne teori for randbetingelserne til brug både for lineær og ikke-lineær stabilitetsteori, afsnit 5, vil her blive gennemgået for den cirkulære cylinderskal.

Forudsætningen vedrørende dødvægtsbelastning, jf. det nævnte afsnit medfører, at der ikke er nogen variation af normalkraften, altså

$$\delta N_{(n)}^* = 0 \tag{9.54}$$

Langs den fastholdte rand i bunden (indeks b) dvs. ved $x = 0$ forudsættes

$$\delta u_b = 0 \qquad \delta v_b = 0 \qquad \delta w_b = 0 \tag{9.55}$$

Langs den belastede "frie" rand i toppen (indeks t) dvs. ved $x = L$ er

$$\delta v_t = 0 \qquad \delta w_t = 0 \tag{9.56}$$

Alle tre flytningsstørrelser ved bunden er altså konstante. Dette adskiller sig bl.a. fra Flügges (Flügge, 1973) velkendte analytiske løsning, hvor δu -flytningen langs randene er varierende, og kun gennemsnitlig er nul.

Til bestemmelse af randbetingelserne for en nærliggende ligevægtstilstand indføres et lokalt retvinklet (n, t) -randkoordinatsystem i ethvert punkt på randen. Systemet har enhedsvektorerne \mathbf{n} og \mathbf{t} i hhv. n - og t -aksens retninger. Normalen til n, t -systemets plan er naturligvis \mathbf{a}_3 . En-

hedsvektoren \mathbf{n} ønskes at være en udadrettet normal til randen, som sammen med, \mathbf{t} og \mathbf{a}_3 skal være i højrestilling. Da \mathbf{a}_3 og \mathbf{n} ligger fast, er det blot \mathbf{t} -vektorens retning, som skal fastlægges.

Betragt først randen i bunden. Komponenterne til \mathbf{n}_b bestemmes ved hjælp af det globale koordinatsystem og basisvektorerne.

$$\mathbf{n}_b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = n_b^1 \mathbf{a}_1 + n_b^2 \mathbf{a}_2 = n_{b1} \mathbf{a}^1 + n_{b2} \mathbf{a}^2 \quad (9.57)$$

Komponenterne kan herved bestemmes til

$$\begin{aligned} n_b^1 &= n_{b1} = -1 \\ n_b^2 &= n_{b2} = 0 \end{aligned} \quad (9.58)$$

Enhedsvektoren \mathbf{t}_b bestemmes af (2.51) som derefter opløses efter basisvektorerne

$$\mathbf{t}_b = e_{\alpha\gamma} n_b^\alpha \mathbf{a}^\gamma = n_b^1 \mathbf{a}^2 = - \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = t^\gamma \mathbf{a}_\gamma = t_\gamma \mathbf{a}^\gamma \quad (9.59)$$

Dette medfører at

$$\begin{aligned} t_b^1 &= t_{b1} = 0 \\ t_b^2 &= t_{b2} = -1 \end{aligned} \quad (9.60)$$

Tilsvarende findes i toppen, hvor indeks t benyttes.

$$\begin{aligned} n_t^1 &= n_{t1} = 1 \\ n_t^2 &= n_{t2} = 0 \end{aligned} \quad (9.61)$$

$$\begin{aligned} t_t^1 &= t_{t1} = 0 \\ t_t^2 &= t_{t2} = 1 \end{aligned} \quad (9.62)$$

Fra det første af de to standardtilfælde, beskrevet i afsnit 5.3, hvor påførte kræfter (og momenter) beholder deres størrelse og retning, haves de fire ligninger (5.69) til (5.72). Af disse fremgår det, at størrelserne $\delta C_{(nn)}$, $\delta C_{(nt)}$, $\delta V_{(n)}$, $\delta A_{(nt)}$ og $\delta A_{(nn)}$ skal bestemmes. Til dette haves formlerne (5.58), (5.59), (5.60), (5.46) og (5.47)

$$\delta C_{(nn)} = \delta C^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = C^{11} = \delta N_*^{11} + N_*^{11} \frac{\partial \delta v^1}{\partial u^1} \quad (9.63)$$

$$\delta C_{(nt)} = e_{\rho\beta} \delta C^{\alpha\beta} n_\alpha n^\rho = \delta C^{12} = \delta N_*^{12} + N_*^{11} \frac{\partial \delta v^2}{\partial u^1} \quad (9.64)$$

$$\begin{aligned}\delta V_{b(n)} &= \delta V^\alpha n_\alpha = -\delta V^1 = -\delta Q_*^1 + N_*^{11} \delta \theta_1 = -\frac{\partial \delta M_*^{11}}{\partial u^1} - \frac{\partial \delta M_*^{21}}{\partial u^2} - N_*^{11} \frac{\partial \delta w}{\partial u^1} \\ \delta V_{t(n)} &= \delta V^1 = \delta Q_*^1 - N_*^{11} \delta \theta_1 = \frac{\partial \delta M_*^{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial \delta M_*^{21}}{\partial u^2} + N_*^{11} \frac{\partial \delta w}{\partial u^1}\end{aligned}\quad (9.65)$$

$$\delta A_{(nt)} = -e_{\beta\lambda} \delta B^{\alpha\beta} n_\alpha n^\lambda = \delta B^{12} = \delta M_*^{12} \quad (9.66)$$

$$\delta A_{(nn)} = \delta B^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = \delta B^{11} = \delta M_*^{11} \quad (9.67)$$

Størrelserne $\delta C^{\alpha\beta}$, δV^α og $\delta B^{\alpha\beta}$ bestemmes ved hhv. (5.22), (5.23) og (5.31).

Desuden bestemmes krumningstørrelserne $1/R_{nt}$ og $1/R_t$ på randene af (5.55) og (5.57)

$$\frac{1}{R_{nt}} = b_{\alpha\beta} t^\alpha n^\beta = 0 \quad (9.68)$$

$$\frac{1}{R_t} = b_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta = \frac{1}{R} \quad (9.69)$$

Krumningsstørrelserne er selvfølgelig identiske i top og bund.

Med ovenstående størrelser findes følgende betingelser, der samtidigt er omskrevet til fysiske komponenter i det retvinklede koordinatsystem

$$1) \quad \delta C_{(nn)} - \frac{\delta A_{(nt)}}{R_{nt}} = 0 \Rightarrow \quad \delta N_x^* + N_x^* \frac{\partial u}{\partial x} = \delta S_x^* + S_x^* \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0 \quad (9.70)$$

$$2) \quad \delta C_{(nt)} - \frac{\delta A_{(nt)}}{R_t} = 0 \Rightarrow \quad \delta N_{xy}^* + N_x^* \frac{\partial \delta v}{\partial x} - \frac{1}{R} \delta M_{xy}^* = 0 \quad (9.71)$$

$$3) \quad \delta V_{(n)} + \frac{\partial \delta A_{(nt)}}{\partial s} = 0 \Rightarrow \quad \begin{aligned} & -\frac{\partial \delta M_x^*}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial \delta M_{xy}^*}{\partial y} - N_x^* \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial \delta M_{xy}^*}{\partial s} = 0 && \text{bund} \\ & \frac{\partial \delta M_x^*}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta M_{xy}^*}{\partial y} + N_x^* \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial \delta M_{xy}^*}{\partial s} = 0 && \text{top} \end{aligned} \quad (9.72)$$

$$4) \quad \delta A_{(nn)} = 0 \Rightarrow \quad \delta M_x^* = 0 \quad (9.73)$$

Det ses at 1. og 4. er randbetingelser, mens 2. og 3. efter at en løsning er bestemt benyttes til at bestemme de tilsvarende randkræfter.

Yderligere ses at 1., 2. og 4. betingelse er identiske i top og bund, mens der sker fortegnssændringer i den 3. betingelse når der gås fra bunden til toppen.

Med indførelse af de konstitutive ligninger kan ovenstående ligninger udskrives på flytningsform og dermed som ekstrabetingelser for flytningerne.

9.3.1 Randbetingelser i lineær stabilitetsteori

Ses først på den lineære teori, fås når de geometriske betingelser fra (9.55) og (9.56) benyttes

$$\delta S_x^* + S_x^* \frac{\partial \delta u}{\partial x} = D_a \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial \delta v}{\partial y} - \frac{\nu}{R} \delta w \right) + N_x^* \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0 \quad (9.74)$$

$$\delta M_x^* = -D_b \left(\frac{\nu}{R^2} \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} = 0 \quad (9.75)$$

Det ses, at cylinderen må kræves "indspændt" mod δu -flytninger ved belastningen i toppen, samtidig med at flytningerne i δw -retningen skal svare til en simpel understøtning i begge ender. Her er bjælke-/pladeterminologien for understøtninger benyttet.

9.3.2 Randbetingelser i ikke-lineær stabilitetsteori

Når de ikke-lineære led tages i regning, fås følgende tilsvarende betingelser

$$\begin{aligned} \delta S_x^* + S_x^* \frac{\partial \delta u}{\partial x} &= D_a \left[\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial \delta v}{\partial y} - \frac{\nu}{R} \delta w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{2R^2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right)^2 \right] + N_x^* \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0 \\ \Rightarrow \left(1 + \frac{N_x^*}{D_a} \right) \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (9.76)$$

$$\delta M_x^* = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} = 0 \quad (9.77)$$

Forskellen mellem de lineære betingelser og de ikke-lineære er, at der i det ikke-lineære tilfælde haves en betingelse, der giver en kobling mellem δu og $(\delta w)^2$. Dette genkendes fra søjleteori-en, hvor en søjles forkortelse pga. udbøjningerne afhænger af $(\delta w)^2$.

DEL 2

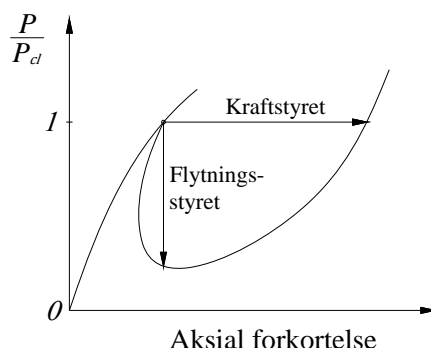
10 Differensmetoden

De udledte ligevægtsligninger for en nærliggende ligevægtstilstand med tilhørende randbetingelser kan ikke løses analytisk, hvorfor det er nødvendigt at behandle problemstillingen numerisk. Det er valgt at benytte differensmetoden, som er forholdsvis let tilgængelig og er kendt for at give gode resultater. Ulempen ved differensmetoden kan være indførelsen af randbetingelserne i det generelle tilfælde. Pga. den cirkulære cylinders simple geometri vil det dog i dette tilfælde ikke føre til komplikationer. For en mere fyldestgørende beskrivelse af metoden henvises til (LeVeque, 2007).

Differensmetoden var frem til omkring 1990 den foretrukne metode til at løse skalligningerne numerisk, og førende skalberegnsprogrammer som Bushnells BOSOR (Bushnell, 1974) og programmet STAGS, der er udviklet af Lockheed til deres missil og rumfartsprogram, var oprindeligt programmer baseret på differensmetoden. Siden har elementmetoden vundet mere indpas i kraft af, at computernes kapacitet er øget. Desuden har elementmetoden gjort det lettere at modellere skaller af enhver form og gjort det lettere at indbygge randbetingelserne.

De følgende ligningssystemer opbygges og løses i MATLAB. Til løsning benyttes MATLAB's indbyggede lineære løser, hvilket kræver, at en iterationsproces opstilles for at løse ikke-lineære problemstillinger. Iterationerne opbygges således, at resultatet fra den foregående iteration benyttes til at bestemme de ikke-lineære størrelser, hvorved problemstillingen, numerisk set, er gjort lineær. Fra dette afsnit og frem vil matrixnotation blive brugt, således at symbolet $\{ \}$ benyttes for vektorer og symbolet $[\]$ for matricer.

Ligningssystemet opstilles således, at der for en given belastning bestemmes et δ -flytningsfelt. Der betragtes altså et kraftstyret system. Desuden vil enhver belastning blive beregnet uafhængigt af resultater for nærliggende belastningstilfælde og teknikker som Newton-Raphson-metoden eller arc-length-metoden vil ikke blive benyttet.



Figur 10.1 – Forskellen mellem kraft- og flytningsstyrede systemer

Det forventes ikke, at hele arbejdskurven kan bestemmes med denne metode, men kun forløbet frem til den første top, se Figur 10.1. Hvis en større del af arbejdskurven ønskes bestemt vil det være nødvendigt at ændre til et flytningsstyret system samt introducere andre løsningstekniker.

I Figur 10.1 illustreres det, at for et kraftstyret system er det muligt at fremkalde et vandret spring i arbejdskurven, hvorefter lasten efter bifurkation kan vokse sig større end den klassiske kritiske last. I nærværende beregninger har det ikke været muligt at reproducere dette spring.

For at afgøre om den iterative proces har konvergeret, måles fejlen ved at indsætte løsningen i det fulde ligningssystem. Fejlen vil løbende blive beregnet, og der formuleres en restriktion for fejlen, som skal være opfyldt.

Beregningerne har vist, at det er nødvendigt at indføre en relaksation i iterationsprocessen. En simpel relaksation, hvor de ikke-lineære led bestemmes ud fra de to foregående løsninger, er valgt.

10.1 Diskretisering

I differensmetoden inddeles skallens midterflade i et net, som i det simpleste tilfælde, i udfoldet tilstand, afgrænser rektangulære felter, se Figur 10.3. De styrende ligninger overføres til differensligninger i netpunkterne vha. passende differensoperatorer. På randen benyttes ligeledes differensoperatorer til at formulere randbetingelserne. Eftersom problemet er formuleret med flytningerne som ubekendte, skal randbetingelserne ligeledes udtrykkes ved flytningerne.

I differensmetoden er grundstenen at overføre differentialkvotienter til differensligninger. Dertil kan flere metoder benyttes. Metoden, der er benyttet her, er beskrevet nedenfor.

Den første afledede af en kontinuert funktion $f(x)$ i et netpunkt O er defineret ved

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_O = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-f_S + f_O}{\Delta x} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_O = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-f_O + f_N}{\Delta x} \qquad (10.1)$$

Her benyttes indekserne S og N , der står for hhv. syd og nord, til at betegne de nærliggende netpunkter til O i afstanden Δ_x , se Figur 10.2.

Heraf fås umiddelbart følgende simple tilnærmelsesformler for den første afledede

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_O \approx \frac{-f_S + f_O}{\Delta_x} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_O \approx \frac{-f_O + f_N}{\Delta_x} \qquad (10.2)$$

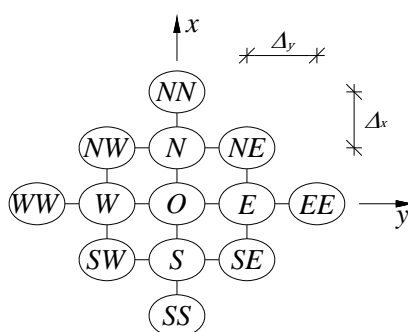
Disse tilnærmelsesformler er ensidige og konsekvensen heraf bliver en "fejl", der er proportional med Δ_x .

En bedre tilnærmelse for den første afledede er gennemsnittet af de to udtryk i (10.2), hvorved fås en andenordens tilnærmelse givet ved

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_O \approx \frac{-f_S + f_N}{2\Delta_x} \quad (10.3)$$

"Fejlen" bliver nu proportional med Δ_x^2 og dermed væsentlig mindre. Desuden fås en symmetrisk fremstilling, hvilket ofte er fordelagtigt.

Selvfølgelig kan også højere ordens tilnærmelser benyttes, hvilket dog betyder at operatorerne blive mere komplicerede, mens "fejlen" ikke reduceres tilsvarende. Derfor benyttes ofte kun andenordens tilnærmelser.



Figur 10.2 – Netpunkter

Ved brug af andenordens tilnærmelser fås følgende udtryk i et netpunkt O for første-, anden-, tredje- og fjerdeordens afledede af en funktion $f(x, y)$, se Figur 10.2.

Afledede mht. x

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_O &= \frac{-f_S + f_N}{2\Delta_x} \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_O &= \frac{f_S - 2f_O + f_N}{\Delta_x^2} \\ \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_O &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\right)_O = \frac{1}{2\Delta_x} \left(-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_S + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_N \right) = \frac{-f_{SS} + 2f_S - 2f_N + f_{NN}}{2\Delta_x^3} \\ \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_O &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\right)_O = \frac{1}{\Delta_x^2} \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_S - 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_O + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_N \right) \\ &= \frac{f_{SS} - 4f_S + 6f_O - 4f_N + f_{NN}}{\Delta_x^4} \end{aligned} \quad (10.4)$$

Afledede mht. y

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_O &= \frac{-f_W + f_E}{2\Delta_y} \\
 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_O &= \frac{f_W - 2f_O + f_E}{\Delta_y^2} \\
 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_O &= \frac{-f_{WW} + 2f_W - 2f_E + f_{EE}}{2\Delta_y^3} \\
 \left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_O &= \frac{f_{WW} - 4f_W + 6f_O - 4f_E + f_{EE}}{\Delta_y^4}
 \end{aligned} \tag{10.5}$$

Blandede afledede

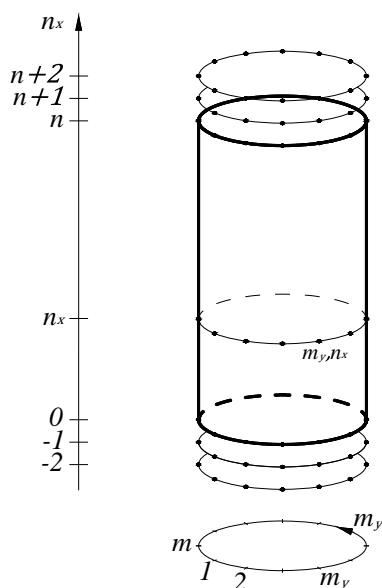
$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_O &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)_O = \frac{1}{2\Delta_x} \left(-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_S + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_N \right) = \frac{f_{SW} - f_{NW} - f_{SE} + f_{NE}}{4\Delta_x \Delta_y} \\
 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)_O &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\right)_O = \frac{1}{2\Delta_x} \left(-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_S + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_N \right) \\
 &= \frac{-f_{SW} + 2f_S - f_{SE} + f_{NW} - 2f_N + f_{NE}}{2\Delta_x \Delta_y^2} \\
 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_O &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\right)_O = \frac{1}{2\Delta_y} \left(-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_W + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_E \right) \\
 &= \frac{-f_{SW} + 2f_W - f_{NW} + f_{SE} - 2f_E + f_{NE}}{2\Delta_x^2 \Delta_y} \\
 \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_O &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\right)_O = \frac{1}{\Delta_x^2} \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_S - 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_O + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_N \right) \\
 &= \frac{f_{SW} - 2f_S + f_{SE} - 2f_W + 4f_O - 2f_E + f_{NW} - 2f_N + f_{NE}}{2\Delta_x^2 \Delta_y^2}
 \end{aligned} \tag{10.6}$$

Det bemærkes, at hvis man ønsker det at beregne den afledede af den afledede for at få den afledede af en højere orden, skal først den ene operator i (10.2) bruges og derefter den anden. Alternativt kan der indføres midlertidige netpunkter imellem fx O og S , og O og N og benytte (10.3).

Der foretrækkes imidlertid at benytte ovenstående "færdige" formler ved opstilling af ligningssystemet.

10.2 Lineær teori

De tre ligevægtsligninger er koblede, hvilket må tages i betragtning, når ligningssystemet opstilles. Dette får bl.a. betydning, når det skal vurderes om ligevægtsligningerne skal opstilles i randpunkterne eller ej. Betragt eksempelvis δu -flytningen i toppen af skallen, δu_t . For at kunne bestemme denne er det ikke nok kun at opstille randbetingelserne i randpunkterne, idet også ligevægtsligningerne skal medtages. I bunden af skallen er flytningsstørrelserne kendte, og ligevægtsligningerne kan derfor undlades.



Figur 10.3 – Netpunkter på cylinder

Da ligevægtsligningerne skal opstilles på og nær randen, er det nødvendigt at tilføje et sæt fiktive netpunkter uden for randen, som vist i Figur 10.3, hvor også den valgte nummerering er vist. Ikke mindst pga. tilføjelsen af fiktive netpunkter er det vigtig at undersøge antallet af ubekendte i forhold til antallet af ligninger, før ligningssystemet opstilles.

Der tælles først op for systemet, hvor ligevægtsligninger på randen i bunden ikke medtages.

Her haves et system med m netpunkter i skallens omkreds og n i skallens længderetning. I hvert netpunkt er der tre ubekendte flytninger. I det tilfælde hvor ligevægtsligningerne i den ene ende udelades skal et sæt ekstra netpunkter i omkredsretningen i bunden tilføjes samt to ekstra sæt netpunkter i omkredsretningen i toppen. I alle disse netpunkter skal der bruges fiktive δw -flytninger, mens der kun skal bruges fiktive δu - og δv -flytninger i det første sæt netpunkter uden for randen i toppen, se Figur 10.3. Dermed haves $3mn + 3m + 2m = (3n + 5)m$ ubekendte flytninger.

Antallet af ligninger er tre ligevægtsligninger for hvert netpunkt på skallen med undtagelse af netpunkterne på randen i bunden. Derudover haves fire randbetingelser for hvert netpunkt på en rand. Dermed haves $3mn - 3m + 4 \cdot 2m = (3n + 5)m$ ligninger dvs. samme antal som antallet af ubekendte.

Det samme vil vise sig at være gældende, hvis ligevægtsligninger medtages i alle netpunkter. I dette tilfælde skal der tilføjes to sæt ekstra punkter uden for randen i begge ender. Det er igen nødvendigt at indføre fiktive δw -flytninger i alle disse netpunkter, mens der kun skal bruges fiktive δu - og δv -flytninger i det første sæt netpunkter uden for begge rande. Antallet af ubekendte bliver $3mn + 4m + 2 \cdot 2m = (3n + 8)m$. Tilsvarende bliver antallet af ligninger $3mn + 2 \cdot 4m = (3n + 8)m$ dvs. ligningssystemet er kvadratisk.

Om ligningssystemet opstilles på den ene eller anden måde bør naturligvis ikke give nogen forskel, hvilket også en simpel numerisk undersøgelse har bekræftet.

For at beskrive hvordan ligningssystemet bygges op ses på en inddeling af cylinderen med m -netpunkter i omkredsretningen og n -netpunkter plus to fiktive netpunkter i hver ende i længderetningen. For at anskueliggøre opstillingen betragtes først et snit i længderetningen og et snit i omkredsretningen. Dernæst vil enkelte eksempler på operatorerne for de afledede mht. til en akse samt for de blandede afledede for det fulde system blive vist. I det følgende vil operatorerne blive opskrevet med δw -flytninger, men de samme operatorer gælder naturligvis også for δu - og δv -flytningerne.

Der gøres igen opmærksom på, at for δu - og δv -flytningerne er det kun nødvendigt at arbejde med et sæt netpunkter i hver ende uden for skallen. Dette vil naturligvis afspejles i differensoperatorerne, som for δu og δv vil blive reduceret ift. operatorerne for δw .

Måden hvorpå ligningssystemet bygges op sker med kvadratiske submatricer, hvis størrelse bestemmes ud fra det antal ubekendte, der er nødvendige. Dette medfører, at systemet "fødes" i den rigtige størrelse, hvor der er plads til alle ligevægtsligninger og randbetingelser.

For snittet i netpunktet m_y i længderetningen, viser det sig nødvendigt med tre operatorer til bestemmelse af den første og anden afledede i netpunkterne fra 0 til n samt den anden afledede i netpunkterne fra -1 til $n + 1$. Herved fås følgende afledede

$$\begin{aligned}
\left\{ \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right\}_{m_y, 0:n} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial \delta w / \partial x_{m_y, 0} \\ \partial \delta w / \partial x_{m_y, 1} \\ \vdots \\ \partial \delta w / \partial x_{m_y, n} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta_x} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & & & \\ & -1 & 0 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & -1 & 0 & 1 & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta w_{m_y, -2} \\ \delta w_{m_y, -1} \\ \delta w_{m_y, 0} \\ \delta w_{m_y, 1} \\ \vdots \\ \delta w_{m_y, n} \\ \delta w_{m_y, n+1} \\ \delta w_{m_y, n+2} \end{bmatrix} = [dx1_n] \{ \delta w_{m_y} \} \\
\\
\left\{ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right\}_{m_y, 0:n} &= \frac{1}{\Delta_x^2} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta w_{m_y, -2} \\ \delta w_{m_y, -1} \\ \delta w_{m_y, 0} \\ \delta w_{m_y, 1} \\ \vdots \\ \delta w_{m_y, n} \\ \delta w_{m_y, n+1} \\ \delta w_{m_y, n+2} \end{bmatrix} = [dx2_n] \{ \delta w_{m_y} \} \\
\\
\left\{ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right\}_{m_y, -1:n+1} &= \frac{1}{\Delta_x^2} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta w_{m_y, -2} \\ \delta w_{m_y, -1} \\ \delta w_{m_y, 0} \\ \delta w_{m_y, 1} \\ \vdots \\ \delta w_{m_y, n} \\ \delta w_{m_y, n+1} \\ \delta w_{m_y, n+2} \end{bmatrix} = [dx2_n^+] \{ \delta w_{m_y} \} \tag{10.7} \\
\\
\left\{ \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^3} \right\}_{m_y, 0:n} &= [dx1_n][dx2_n^+] \{ \delta w_{m_y} \} = \frac{1}{2\Delta_x^3} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & & & \\ & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta w_{m_y, -2} \\ \delta w_{m_y, -1} \\ \delta w_{m_y, 0} \\ \delta w_{m_y, 1} \\ \vdots \\ \delta w_{m_y, n} \\ \delta w_{m_y, n+1} \\ \delta w_{m_y, n+2} \end{bmatrix} \\
&= [dx3_n] \{ \delta w_{m_y} \} \\
\\
\left\{ \frac{\partial^4 \delta w}{\partial x^4} \right\}_{m_y, 0:n} &= [dx2_n][dx2_n^+] \{ \delta w_{m_y} \} = \frac{1}{\Delta_x^4} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta w_{m_y, -2} \\ \delta w_{m_y, -1} \\ \delta w_{m_y, 0} \\ \delta w_{m_y, 1} \\ \vdots \\ \delta w_{m_y, n} \\ \delta w_{m_y, n+1} \\ \delta w_{m_y, n+2} \end{bmatrix} \\
&= [dx4_n] \{ \delta w_{m_y} \}
\end{aligned}$$

Tilsvarende opstilles operatorene for den første og anden afledede mht. y for et sæt n_x netpunkter i omkredsretningen. Herved fås følgende afledede

$$\begin{aligned}
 \left\{ \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right\}_{1:m,n_x} &= \frac{1}{2\Delta_y} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & -1 \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & -1 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 0 & 1 \\ 1 & & & & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta w_{1,n_x} \\ \delta w_{2,n_x} \\ \delta w_{3,n_x} \\ \vdots \\ \delta w_{m-2,n_x} \\ \delta w_{m-1,n_x} \\ \delta w_{m,n_x} \end{Bmatrix} = [dy1_m] \{ \delta w_{n_x} \} \\
 \\
 \left\{ \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right\}_{1:m,n_x} &= \frac{1}{\Delta_y^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta w_{1,n_x} \\ \delta w_{2,n_x} \\ \delta w_{3,n_x} \\ \vdots \\ \delta w_{m-2,n_x} \\ \delta w_{m-1,n_x} \\ \delta w_{m,n_x} \end{Bmatrix} = [dy2_m] \{ \delta w_{n_x} \} \\
 \\
 \left\{ \frac{\partial^3 \delta w}{\partial y^3} \right\}_{1:m,n_x} &= [dy1_m][dy2_m] \{ \delta w_{n_x} \} = \frac{1}{2\Delta_y^3} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & & & -1 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & & & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta w_{1,n_x} \\ \delta w_{2,n_x} \\ \delta w_{3,n_x} \\ \vdots \\ \delta w_{m-2,n_x} \\ \delta w_{m-1,n_x} \\ \delta w_{m,n_x} \end{Bmatrix} \quad (10.8) \\
 &= [dy3_m] \{ \delta w_{n_x} \} \\
 \\
 \left\{ \frac{\partial^4 \delta w}{\partial y^4} \right\}_{1:m,n_x} &= [dy2_m][dy2_m] \{ \delta w_{n_x} \} = \frac{1}{\Delta_y^4} \begin{bmatrix} -6 & -4 & 1 & & 1 & -4 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ -4 & 1 & & & 1 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta w_{1,n_x} \\ \delta w_{2,n_x} \\ \delta w_{3,n_x} \\ \vdots \\ \delta w_{m-2,n_x} \\ \delta w_{m-1,n_x} \\ \delta w_{m,n_x} \end{Bmatrix} \\
 &= [dy4_m] \{ \delta w_{n_x} \}
 \end{aligned}$$

For generalisering af ovenstående operatorer vises systematikken for det fulde ligningssystem nedenfor

$$\left\{ \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right\}_{1:m,-1:n+1} = [dx 1^+] \{ \delta w \} = \frac{1}{2\Delta_x} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & & & \\ -1 & & & 0 & & 1 & & & & & \\ & -1 & & & 0 & & 1 & & & & \\ & & -1 & & & 0 & & 1 & & & \\ & & & -1 & & & 0 & & 1 & & \\ & & & & -1 & & & 0 & & 1 & \\ & & & & & -1 & & & 0 & & 1 \\ & & & & & & -1 & & & 0 & \\ & & & & & & & -1 & & & 0 \\ & & & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta w_{1,-2} \\ \delta w_{2,-2} \\ \delta w_{3,-2} \\ \delta w_{m,-2} \\ \delta w_{1,-1} \\ \delta w_{2,-1} \\ \delta w_{3,-1} \\ \delta w_{m,-1} \\ \delta w_{1,0} \\ \delta w_{2,0} \\ \delta w_{3,0} \\ \delta w_{m,0} \\ \delta w_{1,n} \\ \delta w_{2,n} \\ \delta w_{3,n} \\ \delta w_{m,n} \\ \delta w_{1,n+1} \\ \delta w_{2,n+1} \\ \delta w_{3,n+1} \\ \delta w_{m,n+1} \\ \delta w_{1,n+2} \\ \delta w_{2,n+2} \\ \delta w_{3,n+2} \\ \delta w_{m,n+2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10.9)$$

[illegible]

[illegible]

Desuden haves

$$\left\{ \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x \partial y^2} \right\}_{1:m,-1:n+1} = [dy2][dx1^+]\{\delta w\}$$

$$\left\{ \frac{\partial^3 \delta w}{\partial x^2 \partial y} \right\}_{1:m,-1:n+1} = [dy][dx2^+]\{\delta w\} \quad (10.12)$$

$$\left\{ \frac{\partial^4 \delta w}{\partial x^2 \partial y^2} \right\}_{1:m, -1:n+1} = [dy2][dx2^+]\{\delta w\}$$

Ligningssystemet kan nu i første omgang skrives op uden hensyntagen til randbetingelserne og eventuelle imperfektioner. Systemet tænkes opbygget på følgende måde

$$[A_l] \begin{Bmatrix} \{\delta u_{1:m,-1:n+1}\} \\ \{\delta v_{1:m,-1:n+1}\} \\ \{\delta w_{1:m,-2:n+2}\} \end{Bmatrix} = -N_x[L] \begin{Bmatrix} \{\delta u_{1:m,-1:n+1}\} \\ \{\delta v_{1:m,-1:n+1}\} \\ \{\delta w_{1:m,-2:n+2}\} \end{Bmatrix} \quad (10.13)$$

Den lineære koefficientmatrix $[A_L]$ og matricen $[L]$ opbygges vha. ovenstående differensoperatore. De repræsenterer hhv. venstre- og højresiden af ligevægtsligningerne (9.44) til (9.46).

Ses der nærmere på $[A_I]$ og $[L]$, er det tydeligt, at disse kan deles op i ni zoner; tre zoner for hver ligevægtsligning, og hver af disse tre zoner kan inddeles i yderligere tre zoner for hver af de tre flytningsretninger. Således fås når $[I]$ indføres for matricen med værdien én i diagonalen, i de rækker hvor der er ligevægtsligninger.

$$\begin{aligned}
[A_l] = D_a \left[\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{c} [dx2] + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{R^2} [dy2] \end{array} & \left[\begin{array}{c} \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{R} [dy1][dx1^+] \end{array} & \left[\begin{array}{c} -\nu \frac{1}{R} [dx1] \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{R} [dy1][dx1^+] \end{array} & \left[\begin{array}{c} \frac{1}{R^2} [dy2] + \frac{1-\nu}{2} [dx2] \end{array} & \left[\begin{array}{c} -\frac{1}{R^2} [dy1] \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} \frac{\nu}{R} [dx1] \end{array} & \left[\begin{array}{c} \frac{1}{R^2} [dy1] \end{array} & \left[\begin{array}{c} -\frac{w}{R^2} [l] \end{array} \right] \end{array} \right] \right. \\
+ \frac{D_b}{R^2} \left[\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{c} \frac{1-\nu}{8} \frac{1}{R^2} [dy2] \end{array} & \left[\begin{array}{c} -\frac{3(1-\nu)}{8} \frac{1}{R} [dy1][dx1^+] \end{array} & \left[\begin{array}{c} -\frac{1-\nu}{2} \frac{1}{R} [dy2][dx1^+] \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} -\frac{3(1-\nu)}{8} \frac{1}{R} [dy1][dx1^+] \end{array} & \left[\begin{array}{c} \frac{9(1-\nu)}{8} [dx2] + \frac{1}{R^2} [dy2] \end{array} & \left[\begin{array}{c} \frac{3-\nu}{2} [dy1][dx2^+] + \frac{1}{R^2} [dy3] \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} \frac{1-\nu}{2R} [dy2][dx1^+] \end{array} & \left[\begin{array}{c} -\frac{3-\nu}{2} [dy1][dx2^+] - \frac{1}{R^2} [dy3] \end{array} & \left[\begin{array}{c} -R^2 [dx4] - 2[dy2][dx2^+] - \frac{1}{R^2} [dy4] \end{array} \right] \end{array} \right] \right.
\end{aligned} \quad (10.14)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} [dx2] & [0] & [0] \\ [0] & [dx2] & [0] \\ [0] & [0] & [dx2] \end{bmatrix} \quad (10.15)$$

Randbetingelserne tilføjes nu til systemet. På nuværende tidspunkt har ligningssystemet $3mn$ ligninger men $3mn + 8m$ ubekendte. Dermed er systemet, som forudsagt, bygget op med naturlige pladser til ligninger for randbetingelserne. Randbetingelserne tilføjes til koefficientmatricen, som dermed bliver

$$[A_{l, RB}] = [A_l] + [RB_l] \quad (10.16)$$

Ranbetingelserne for den lineære teori, formlerne (9.74) og (9.75), omsættes på tilsvarende måde som ligevægtsligningerne til differencer. Disse ligninger får en naturlig placering i ligningssystemet. Således kommer betingelserne for δu , δv og δw ind i systemet umiddelbart før og efter hver af de tre sæt ligevægtsligninger. Dermed placeres koefficienterne tæt på diagonalen i $[RB_l]$, mens nullerne i disse positioner beholdes i $[L]$.

Dermed kan (10.13) omskrives, og det endelige ligningssystem for den lineære løsning bliver

$$([A_{l, RB}] + N_x[L]) \begin{Bmatrix} \{\delta u\} \\ \{\delta v\} \\ \{\delta w\} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (10.17)$$

10.3 Ikke-lineær teori

En tilnærmet ikke-lineær teori er foreslået i afsnit 8, hvor det også er vist, hvorledes der kan tages hensyn til imperfektioner. I nævnte afsnit beskrives hvilke nødvendige led fra den ikke-lineære tøjningstensor, der medtages. I ligningerne (9.28) til (9.30) er disse bidrags betydning vist for den cirkulære cylindreskal.

De ikke-lineære størrelser bestemmes her ved en simpel iterationsproces, hvor koefficientmatricen i den i -te iteration betegnes $[A_{nl, RB}]_i$. Denne matrix opdateres løbende igennem sen. $[A_{nl, RB}]_i$ -matricen er bestemt ved summen af den lineære del $[A_l]$ og den ikke-lineære del

$[A_{nl}]_i$ samt de ikke-lineære randbetingelser $[RB_{nl}]_i$. $[A_{nl}]_i$ og $[RB_{nl}]_i$ opdateres for hvert skridt i iterationen. Dermed kan koefficientmatricen skrives som

$$[A_{nl, RB}]_i = [A_l] + [A_{nl}]_i + [RB_{nl}]_i \quad (10.18)$$

De to ikke-lineære størrelser $[A_{nl}]_i$ og $[RB_{nl}]_i$ kan først bestemmes, når et flytningsfelt er kendt.

Størrelsen $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2$ for den i -te iteration udregnes som produktet af værdierne for den forudgående iteration, indeks $i - 1$, og værdierne i den pågældende iteration, indeks i . Dette betyder, at

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{o,i}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{o,i-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{o,i} = \left(\frac{-f_s + f_N}{\Delta x}\right)_{i-1} \left(\frac{-f_s + f_N}{\Delta x}\right)_i \quad (10.19)$$

som med de tidligere indførte operatorer kan skrives

$$\left\{ \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x}\right)^2 \right\}_{1:m,0:n,i} = \text{diag} ([dx1]\{\delta w\}_{i-1}) [dx1]\{\delta w\}_i \quad (10.20)$$

Her er indført operatoren $\text{diag}(\quad)$, som omformer en vektor til diagonalen i en kvadratisk matrix.

Tilsvarende findes for de afledede af de ikke-lineære deformationsbidrag

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right)^2}{\partial x} \right)_{o,i} &= 2 \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right)_{o,i-1} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right)_{o,i} \\ \Rightarrow \left\{ \frac{\partial \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right)^2}{\partial x} \right\}_{1:m,0:n,i} &= 2 \text{diag} ([dy1]\{\delta w\}_{i-1}) [dy1][dx1^+]\{\delta w\}_i \end{aligned} \quad (10.21)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right)^2}{\partial x} \right)_{o,i} &= \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right)_{o,i-1} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right)_{o,i} + \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right)_{o,i-1} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right)_{o,i} \\ \Rightarrow \left\{ \frac{\partial \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right)^2}{\partial x} \right\}_{1:m,0:n,i} &= \text{diag} ([dx1]\{\delta w\}_{i-1}) [dy1][dx1^+]\{\delta w\}_i \\ &\quad + \text{diag} ([dy1]\{\delta w\}_{i-1}) [dx2]\{\delta w\}_i \end{aligned}$$

Dermed kan $[A_{nl}]_i$ og $[RB_{nl}]_i$ opstilles som for de lineære størrelser.

For at starte processen med den ikke-lineære iteration kræves et "godt gæt". Til dette gæt vil den lineære løsning blive brugt.

10.3.1 Imperfektioner

Evt. imperfektioner kan tages i regning som beskrevet i afsnit 8.2, idet flytningerne deles op i to bidrag: ét bidrag fra imperfektionerne, indeks *imp*, og ét bidrag fra tillægsflytningerne ud over imperfektionerne, indeks *til*. Dette gælder naturligvis kun de flytninger, som i ligningerne (9.44) til (9.46) hidrører fra snitkræfter og snitmomenter.

Dermed kan (10.13) omskrives, og det endelige ligningssystem bliver

$$[A_{nl,RB}]_i \begin{Bmatrix} \{\delta u\} \\ \{\delta v\} \\ \{\delta w\} \end{Bmatrix}_{til,i} = -N_x[L] \left(\begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{w\} \end{Bmatrix}_{imp} + \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{w\} \end{Bmatrix}_{til,i} \right) \quad (10.22)$$

DEL 2

11 Lineærelastisk foldningsanalyse uden imperfektioner – klassisk kritisk last

I første omgang ses på den lineære foldningsanalyse. Dette gøres dels for at verificere den opstillede teori og dels for at kontrollere det opstillede differensligningssystem.

Som sammenligningsgrundlag benyttes Flügges (Flügge, 1960) velkendte trigonometriske løsning, ved hjælp af hvilken foldningslasterne kan bestemmes for forskellige foldningsmønstre.

Flügges løsning af ligevægtsligningerne til bestemmelse af foldning er

$$\begin{aligned}\delta u &= A_u \cos \frac{m_w y}{R} \cos \frac{n_w \pi x}{L} \\ \delta v &= A_v \sin \frac{m_w y}{R} \sin \frac{n_w \pi x}{L} \\ \delta w &= A_w \cos \frac{m_w y}{R} \sin \frac{n_w \pi x}{L}\end{aligned}\tag{11.1}$$

Her er A_u , A_v og A_w er foldningsamplituder, m_w er antallet af bølger i omkredsretningen og n_w er antallet af halvbølger i længderetningen.

I Flügges løsning er δu -flytningen altså i begge rande varierende og kun gennemsnitligt nul.

Dette er ikke, som tidligere nævnt i afsnit 9.3, i overensstemmelse med de randbetingelser som er formuleret i denne afhandling. Randbetingelserne er her, at δu -flytningen ved randen i bunden er nul overalt, mens $\frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0$ i toppen. Randbetingelsen i toppen giver altså mulighed for at flytningen kan variere.

Betydningen af de klassiske randbetingelser er grundigt studeret af Yamaki (Yamaki, 1984).

Hans studium viste, hvorvidt randbetingelserne under foldning tillod flytninger i længderetningen eller ej ikke gav den store forskel i den kritiske last.

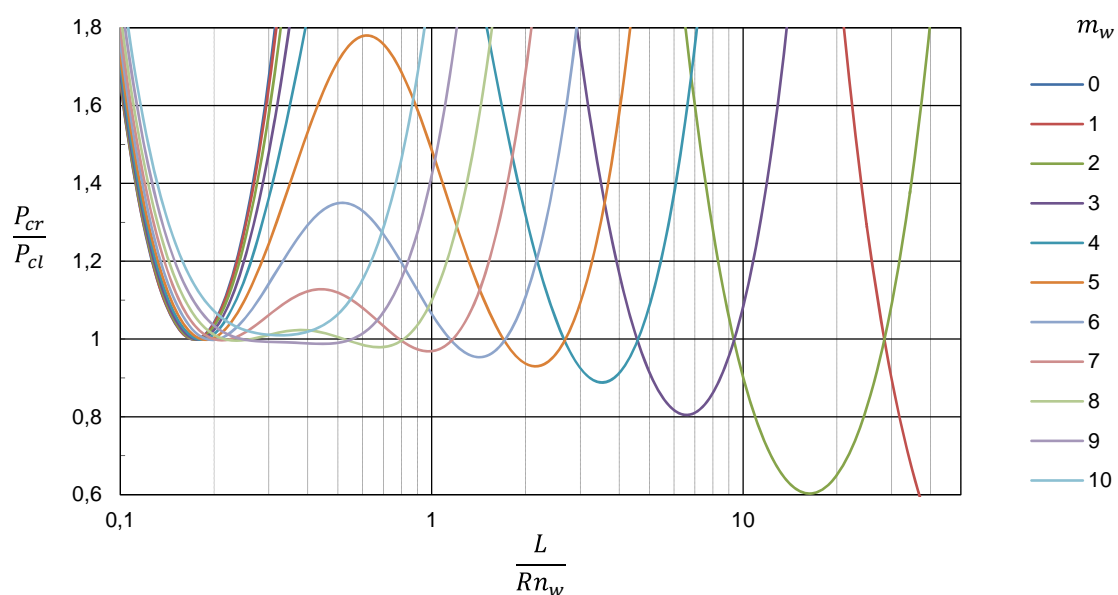
En aksialt belastet cirkulær cylinderskal kan siges at være en mellemting mellem en plade og en søjle, når den undersøges for lineærelastisk foldning. Dette skal forstås således, at når længde-radius-forholdet L/R er tilpas lille, vil den elastiske foldningslast være bestemt af plade-teorien. Tilsvarende når L/R -forholdet er tilpas stort, kan den elastiske foldningslast bestemmes som for en Euler-søjle. Imellem disse to ydre punkter findes der et stort antal forskellige foldningsmønstre med et antal bølger i omkredsretningen og et antal halvbølger i længderetningen, se Figur 11.1.

Figuren viser den kritiske last P_{cr} for et givet foldningsmønster afbilledet som funktion af L/R -forholdet og for en given tykkelse. For at gøre afbildningen dimensionsløs er den kritiske last målt i forhold til den klassiske elastiske foldningslast, som blev bestemt i begyndelsen af 1900-tallet af Timoshenko.

Den klassiske kritiske last er, se (1.17)

$$P_{cl} = \frac{2 \pi E h^2}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}} \quad (11.2)$$

I Figur 11.1 er Flügges foldningskurver for en aksialt belastet cylinder vist. I figuren er ligevægtsløsninger afbildet ift. forholdet mellem radius, længden og antallet af halvbølger i længderetningen for 0 til 10 bølger i omkredsretningen. Mindsteværdierne af kurverne definerer til sammen foldningslasten. Bemærk at der må have et heltal af såvel halvbølger i længderetningen som helbølger omkredsretningen. Desuden skal der mindst være en halvbølge i længderetningen.



Figur 11.1 – Flügges foldningsløsning, $R/h = 100$

Det ses at foldningslasten langt fra er en konstant størrelse, men en størrelse som udover de geometriske og mekaniske parametre afhænger af foldningsmønsteret. Det ses også, at der findes mange forskellige foldningsmønstre, som giver samme kritiske last, ligesom det kendes fra pladeteorien.

I ligevægtsmetoden bestemmes foldningslasten for den perfekte skal ved at undersøge, hvorvidt der findes ligevægtstilstande i nabotilstande for en given belastning. Når der ikke skal tages hensyn til geometrisk ikke-linearitet eller til imperfektioner, kan kritiske laster og tilhørende flytninger findes ved at løse et generaliseret egenværdiproblem.

Egenværdiproblemet som skal løses er jf. (10.13)

$$[A_{l, RB}] \begin{Bmatrix} \{\delta u\} \\ \{\delta v\} \\ \{\delta w\} \end{Bmatrix} = -\Lambda N_{cl}[L] \begin{Bmatrix} \{\delta u\} \\ \{\delta v\} \\ \{\delta w\} \end{Bmatrix} \quad (11.3)$$

Her er $\begin{Bmatrix} \{\delta u\} \\ \{\delta v\} \\ \{\delta w\} \end{Bmatrix}$ foldningsmønsterets egenvektor, og Λ er egenværdien.

Kritiske laster med tilhørende deformationer bestemmes vha. MATLABs indbyggede funktion til bestemmelse af egenværdier og egenvektorer. For at gøre beregningerne lettere bestemmes kun et givet antal af de mindste egenværdier. Antallet er varierende i de kommende beregninger, med et minimum på 400.

Før problemet kan løses skal en passende inddeling af skallen fastlægges, således at gode resultater opnås for forskellige bølgetal.

Flere FEM-undersøgelser fra litteraturen indikerer, at en inddeling svarende til en afstand mellem netpunkterne på omkring $0,25\sqrt{Rh} - 0,5\sqrt{Rh}$ er nødvendig. Dette svarer til at en afstand fra 15 til 30 procent af den klassiske halvbølgelængde λ_{cl} ved aksesymmetrisk foldning er nødvendig. Denne er bestemt ved, se fx (Timoshenko, 1934)

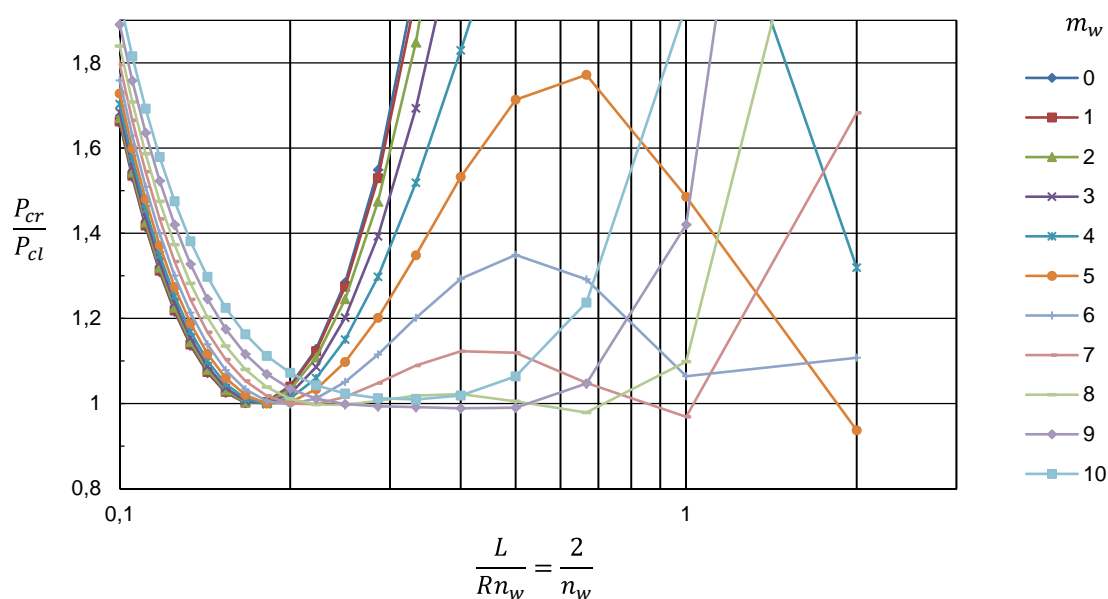
$$\lambda_{cl} = \frac{\pi}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}} \sqrt{Rh} \quad (11.4)$$

Når det skal vurderes, hvorvidt et resultat har konvergeret mht. til inddeling, er det naturligt at se på såvel afstanden mellem netpunkterne som antallet af netpunkter pr. bølge bestemt ved foldningsanalysen.

Til foldningsanalysen er benyttet en cylinder med følgende dimensioner

- $R = 100 \text{ mm}$
- $h = 1 \text{ mm}$
- $L = 200 \text{ mm}$

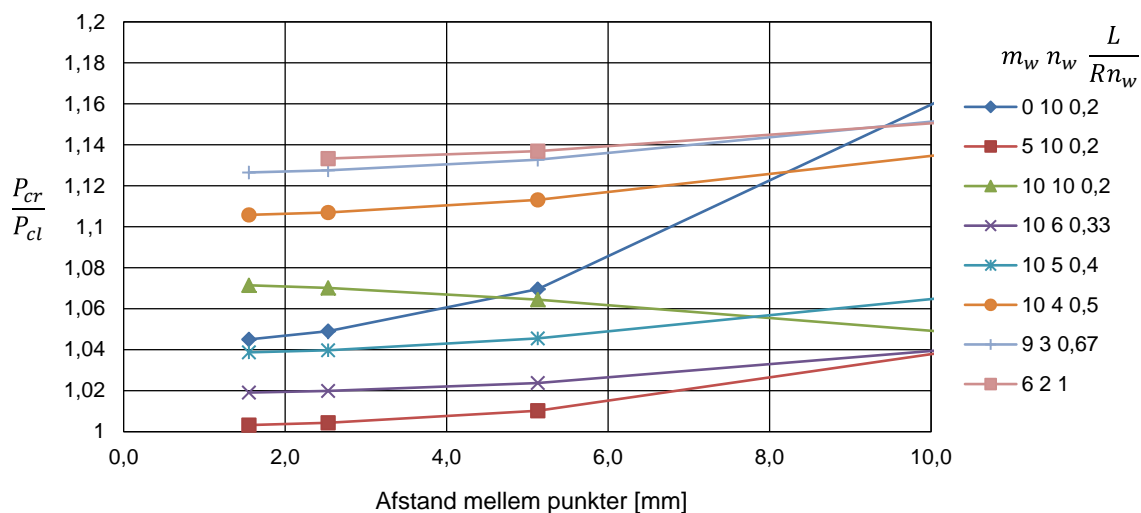
Med ovenstående dimensioner bliver den største $\frac{L}{Rn_w}$ -værdi 2. Desuden gælder det at mere end 10 bølger i omkredsretningen vil give værdier, som ligger over den klassiske last, se Figur 11.2. Da der findes mange nærliggende egenværdier, må der ses på flere forskellige foldningsmønstre for at få et klart billede af hvor fin en diskretisering, der er nødvendig.



Figur 11.2 – Flüggeløsning, $R/h = 100$ og $L/R = 2$

11.1 Diskretisering

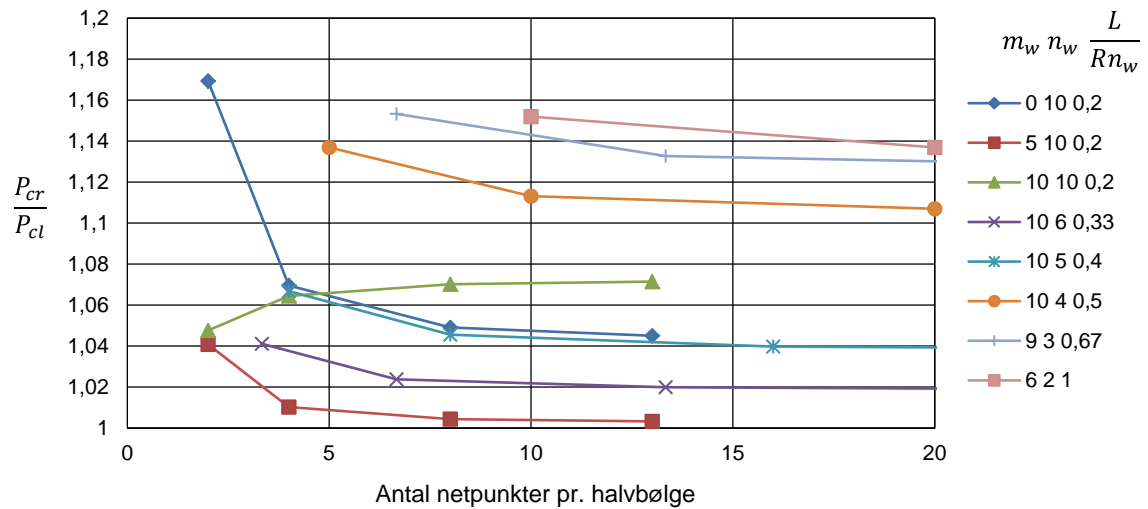
Først ses på inddelingen i længderetningen. I Figur 11.3 er den kritiske last for forskellige foldningsmønstre vist som funktion af afstanden mellem netpunkterne i længderetningen. Antallet af netpunkter i omkredsretningen i Figur 11.3 er 400, men samme tendens er fundet for såvel færre som flere netpunkter i omkredsretningen.



Figur 11.3 – Afstand mellem netpunkter i længderetningen for forskellige foldningsmønstre

Tendensen er forholdsvis entydig. I hovedsagen gælder det, at for de fleste tilfælde er det vurderet at være tilstrækkeligt med en afstand på 5 mm svarende til $0,5\sqrt{Rh}$. Dog ses det, at i spe-

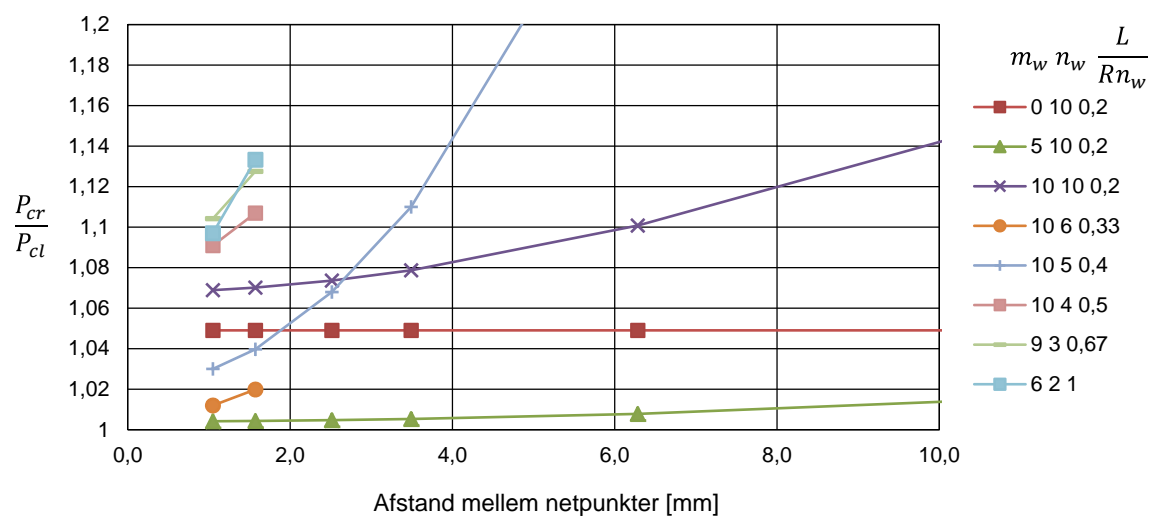
cielt et tilfælde gælder dette ikke: For en aksesymmetrisk foldning med 10 halvbølger i længderetningen kræves en finere inddeling.



Figur 11.4 – Antal netpunkter pr halvbølge i længderetningen for forskellige foldningsmønstre

I Figur 11.4 er parameteren derfor antal netpunkter pr. halvbølge. Ved at tilføje den ekstra betingelse at der minimum skal være 10 netpunkter pr. halvbølge fås, sammen med afstandskriteriet, en tilfredsstillende konvergeret inddeling i længderetningen.

Hvad angår det nødvendige antal netpunkter i omkredsretningen, er billedet ikke lige så tydeligt, som for netpunkter i længderetningen. I Figur 11.5 er resultatet for de samme foldningsmønstre, som blev benyttet ved studiet af betydningen af netpunkter i længderetningen, vist ift. afstanden mellem netpunkterne i omkredsretningen.



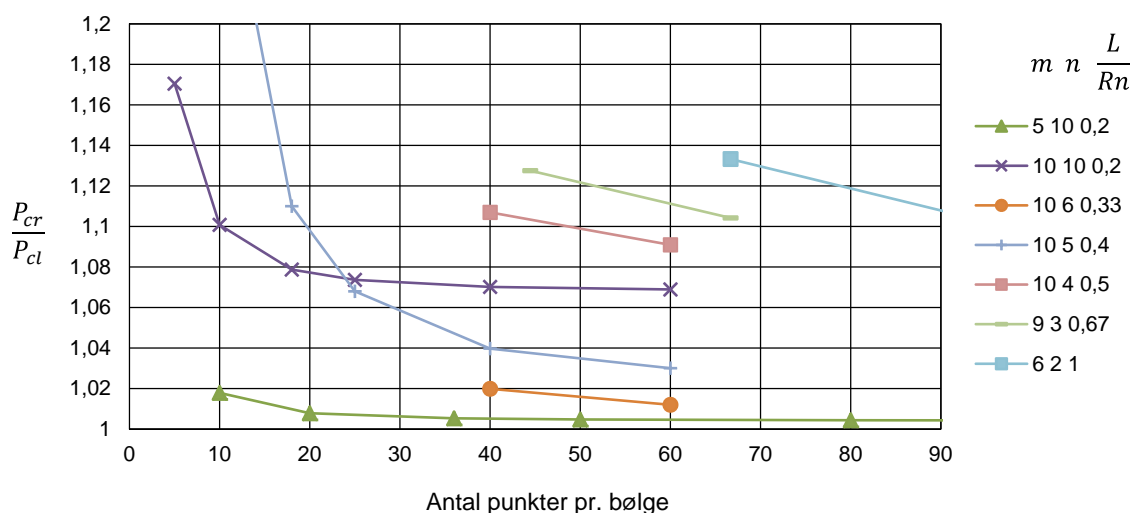
Figur 11.5 – Afstand mellem netpunkter i omkredsretningen for forskellige foldningsmønstre

Umiddelbart ses det, at følsomheden overfor antallet af netpunkter i omkredsretningen er betydeligt større end overfor antallet af netpunkter i længderetningen.

Som en noget uventet tendens viser det sig, at antallet af halvbølger i længderetningen har indflydelse på kravet til antallet af netpunkter i omkredsretningen. Således ses det, at i det givne tilfælde vil det være tilfredsstillende med en afstand mellem netpunkterne på 3,5 mm svarende til $0,35\sqrt{Rh}$. Dette gælder for foldningsmønstre med op til 10 halvbølger i længderetningen, svarende til en halvbølgelængde på 20 mm.

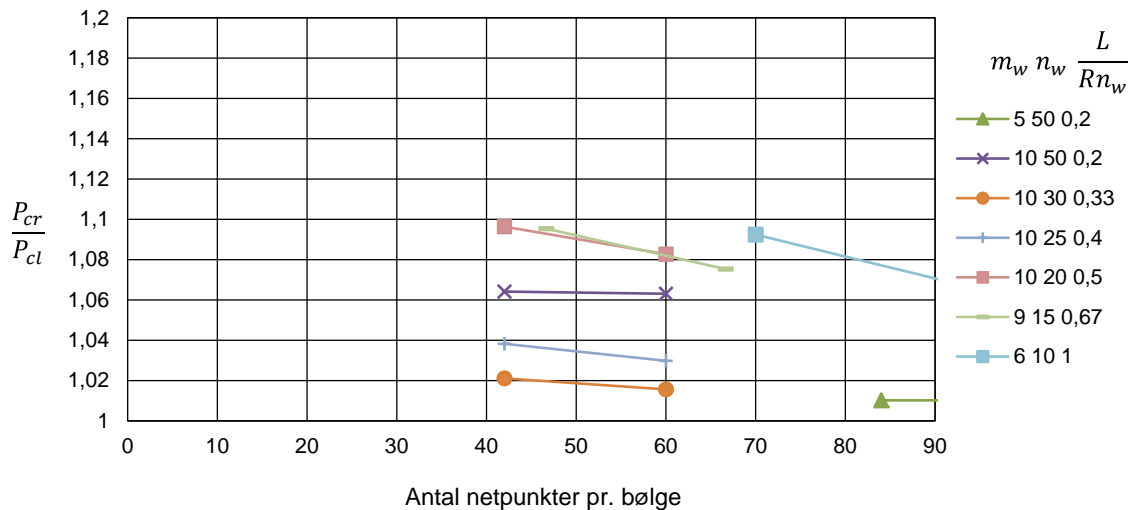
Desuden ses det, at ved aksesymmetrisk foldning har afstanden mellem netpunkterne praktisk taget ingen betydning. Det er fundet, at resultatet for aksesymmetrisk foldning er det samme, enten der er 50 eller 600 netpunkter i omkredsretningen.

Ses på antallet af netpunkter pr. bølge i omkredsretningen, se Figur 11.6, anslås det, at der skal benyttes op mod 80-100 netpunkter pr. bølge før resultatet for de fleste foldningsmønstre konvergerer.



Figur 11.6 – Antal netpunkter pr. bølge i omkredsretningen for forskellige foldningsmønstre

I Figur 11.7 er vist resultatet af en foldningsanalyse med en fem gange så lang skal end den ovenfor benyttede, men med samme R/h -forhold. Resultaterne for foldningsmønstrene svarende til ovenstående er vist under den forudsætning, at bølgetallet i længderetningen ligeledes er fem gange så stort. Samme tendens ang. antallet af netpunkter i omkredsretningen gør sig gældende for såvel korte som lange cylinderskaller. Dermed konkluderes det, at ved en halvbølgelængde i længderetningen større end 20 mm skal antallet af netpunkter i omkredsretningen øges betragteligt.



Figur 11.7 – Antal netpunkter pr. bølge i omkredsretningen for forskellige foldningsmønstre, $L/R = 10$

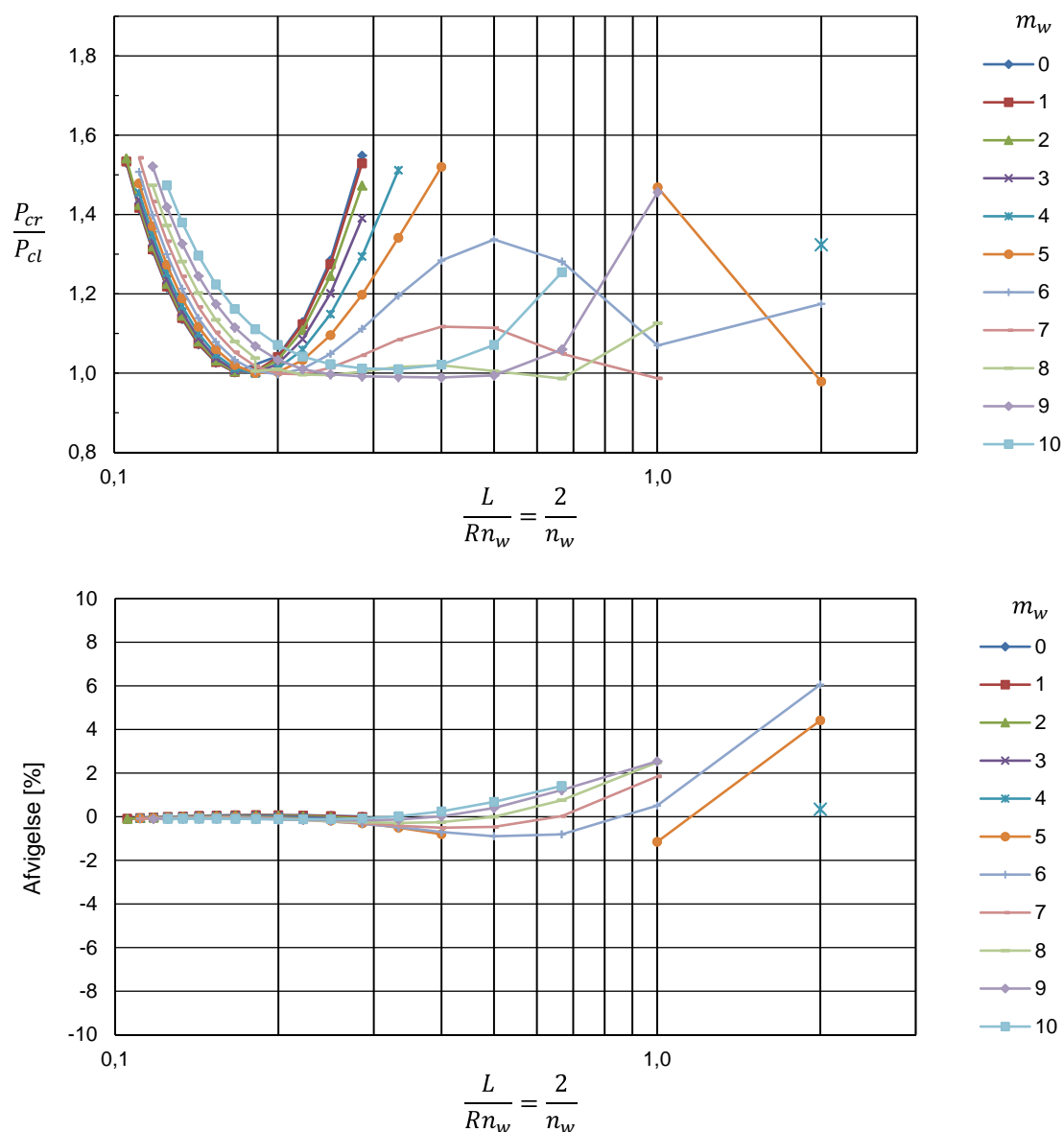
Resultatet af undersøgelsen af antallet af nødvendige netpunkter er dermed:

- For netpunkter i længderetningen må afstanden mellem netpunkterne maksimalt være $0,5\sqrt{Rh}$, og der må ikke være mindre end 10 netpunkter pr. halvbølge.
- For netpunkter i omkredsretningen må afstanden maksimalt være $0,35\sqrt{Rh}$, og når halvbølgerne i længderetningen er længere end 20 mm, skal antallet af netpunkter i omkredsretningen øges betragteligt.

Hvad angår en foldningsanalyse, hvor resultatet forventes at følge Flügges løsning, skal der mindst benyttes en inddeling med ca. 600 netpunkter i omkredsretningen og 400 netpunkter i længderetningen for at få tilfredsstillende resultater i intervallet $0,1 < \frac{L}{Rn_w} < 2$. Resultater for netop denne inddeling er vist i det følgende.

11.2 Resultat

For at vurdere om den opstillede differensmetode kan reproducere Flügges resultater bestemmes først foldningslaster, hvor betingelsen $\delta u = 0$ i bunden er erstattet med betingelsen $\frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0$. Dermed haves en Flügge-lignende tilstand, dog er det ikke krævet, at δu -flytningerne i enderne gennemsnitlig er nul. Resultat af en sådan analyse er vist i Figur 11.8, hvor også afvigelsen i procent mellem den fundne kritiske værdi og Flügges løsning er afbildet.



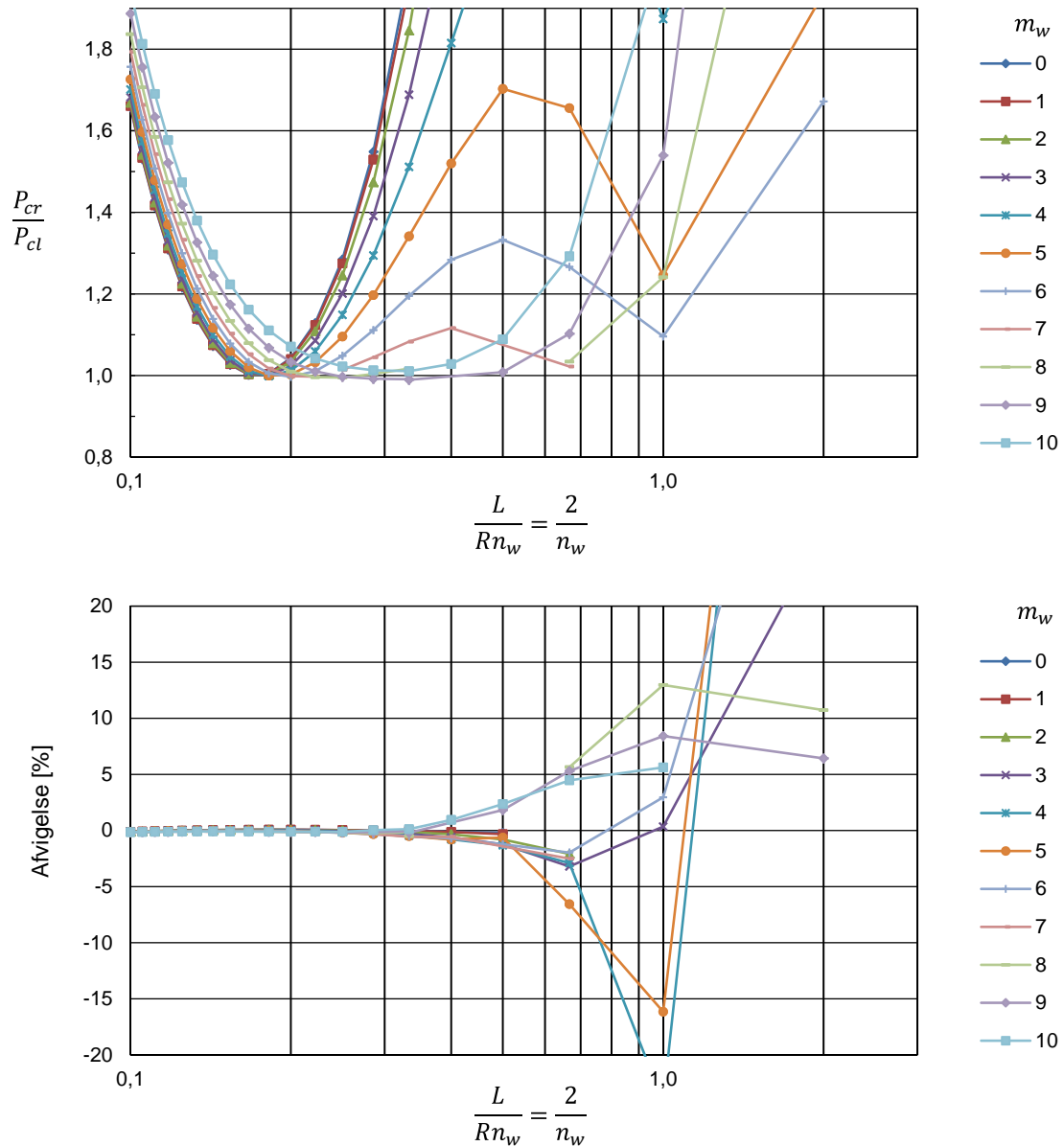
Figur 11.8 – Resultat og afvigelse mellem Flügges løsning og differensmetodens løsning for tilsvarende randbetingelser, $\partial \delta u / \partial x = 0$ i top og bund.

Det ses, at resultaterne er stort set identiske med Flügges løsning op til $\frac{L}{Rn_w} = 0,33$, svarende til 6 halvbølger i længderetningen. Ved færre bølger i længderetningen bliver afvigelsen numerisk større, idet foldningskurverne er lidt forskudt i forhold til Flügges. I hele intervallet er foldningsmønstrene identiske med Flügges løsning, for såvel δw -feltet som δu - og δv -feltet.

Årsagen til den lille forskel ved færre end seks halvbølger i længderetningen er ikke undersøgt yderligere. Den mest oplagte forklaring er naturligvis forskellen i de to teorier på de led, der multipliceres med bøjningsstivheden, jf. afsnit 9.2.1.

Ved beregningen blev som nævnt de 400 mindste egenværdier bestemt. De størst fundne egenværdier er omkring $1,5 P_{cr}/P_{cl}$, og værdier over dette niveau er fjernet. Dermed finder man kun resultater med en halvbølge i længderetningen, når der er 4-6 bølger i omkredsretningen, hvilket stemmer overens med Flügges løsning, se Figur 11.2.

Dernæst til betingelsen $\delta u = 0$ i bunden. Resultatet af en analyse vedr. denne betingelse er vist i Figur 11.9. Her blev de 2000 mindste egenværdier bestemt.



Figur 11.9 – Resultat og afvigelse mellem Flügges løsning og differensmetodens løsning med $\delta u = 0$ i bunden og $\partial \delta u / \partial x = 0$ i toppen.

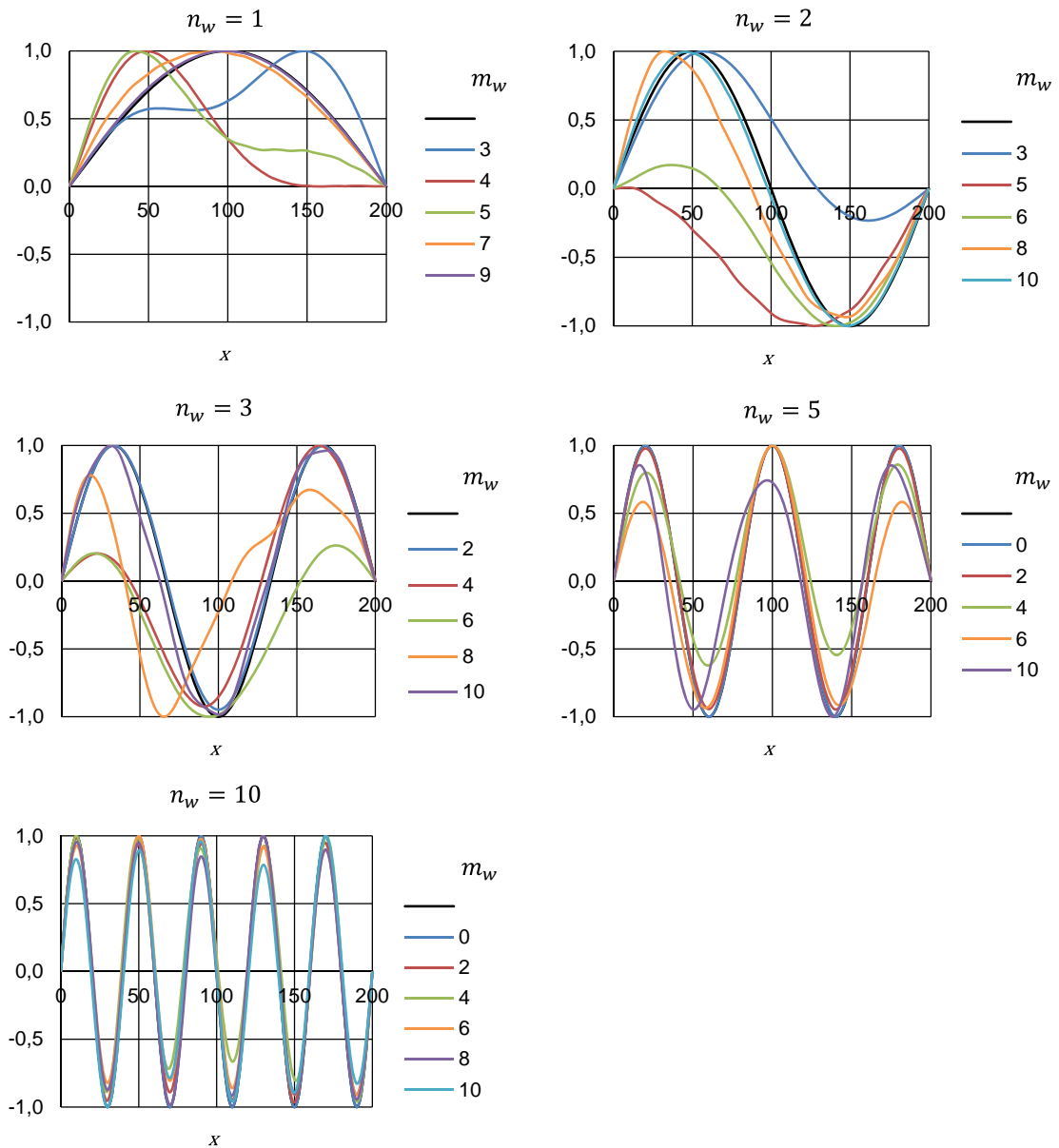
Det ses igen, at løsningen er stort set sammenfaldende med Flügge ned til 6 halvbølger i længderetningen, hvorefter forskellen vokser kraftigt. Det kan dermed umiddelbart konkluderes, at randbetingelsen hovedsageligt har betydning, når der er få bølger i længderetningen, hvorved der ikke fremkommer et nyt minimum i foldningslasten.

Pga. randbetingelsen $\delta u = 0$ beskriver m_w og n_w , i Figur 11.9, som udgangspunkt kun en værdi for antallet af hhv. hel- og halvbølger i δw -feltet. Det viser sig, at δv -feltet har samme form som δw -feltet, mens antallet af halvbølger i længderetningen i δu -feltet er forskudt en kvartbølge ift. δw -feltet. Antallet af bølger i omkredsretningen er dog det samme for alle tre flytningsstørrelser. Desuden gælder det, at δu -flytningerne i toppen er varierende. Derfor kan det rimelige i en afbildning med $L/(Rn_w)$, som abscisse diskuteres, men intet bedre er fundet.

Sammenlignes foldningsmønstrene for de to typer randbetingelser ses en tydelig forskel. I Figur 11.10 er δw -bølgerne i længderetningen vist. I Flügges løsning findes sinusbølger med konstant amplitude, uafhængigt af antallet af bølger i omkredsretningen, se de sorte kurver i Figur 11.10. For randbetingelsen $\delta u = 0$ i bunden, findes varierende former for δw -flytninger afhængigt af antallet af bølger i omkredsretningen, og i visse tilfælde er det ikke tydeligt, hvor mange halvbølger der er

Ses først på foldningsmønstrene med 1 og 2 halvbølger i længderetningen. Her afviger specielt tilfældene med op til 6 bølger i omkredsretningen fra Flügges sinusbølger. Med 7 eller flere bølger i længderetningen fås tilnærmelsesvis Flügges resultat.

.



Figur 11.10 – Foldningsmønstre for 1, 2, 3, 5 og 10 bølger i længderetningen og forskellige bølgetal i omkredsretningen. Sorte kurver: sinusbølger.

For 3 halvbølger i længderetningen ses, at tilfældene med 2 og 10 bølger i omkredsretningen stort set er sammenfaldene med sinusformen, mens 4, 6 og 8 bølger i omkredsretningen afviger tydeligt. Med 5 og 10 halvbølger i længderetningen fås sinusbølgeformen for samtlige resultater dog har enkelte løsninger ikke konstant amplitude.

Som forventet er foldningsmønstre med få halvbølger i længderetningen generelt influeret mere af randbetingelsen $\delta u = 0$ end tilfældet er for 5 og 10 halvbølger. Der er dog ikke fundet nogen sammenhæng mellem foldningsmønstrenes afvigelse fra Flügges resultat og afvigelsen i den kritiske last som vist i Figur 11.9.

DEL 2

12 Ikke-lineære løsninger for imperfekte skaller

I det følgende afsnit vil to forskellige former på en geometrisk imperfektions indvirkning på den kritiske last blive undersøgt. De to imperfektionstyper er:

1. Aksesymmetrisk imperfektion med bølger i hele skallens længde
2. En imperfektion med bølger i såvel længderetningen som omkredsretningen

Begge imperfektioner er udelukkende w -imperfektioner.

For at finde nærliggende ligevægtstilstande, når der tages hensyn til ikke-lineære deformationer, benyttes iterationsprocessen som beskrevet i afsnit 10.3, hvor de ikke-lineære størrelser bestemmes ud fra resultatet af den foregående iteration. Dvs. for at finde en nærliggende ligevægtstilstand for en given last skal et stabilt flytningsfelt bestemmes.

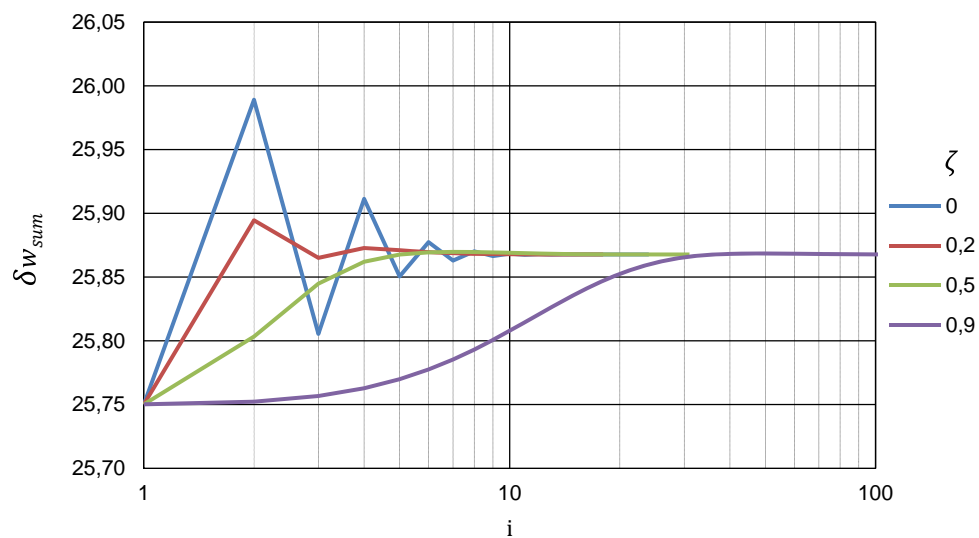
Nøjagtigheden af fundne kritiske laster vil være afhængig af intervallet mellem de laster, der undersøges. Dette fører til, at resultaterne i det følgende vil være bestemt med en usikkerhed på 0,5 % ift. den klassiske kritiske last.

Det har ved beregningerne vist sig nødvendigt at indføre en simpel numerisk relaksationsfaktor ζ for at finde statiske løsninger når lasten nærmer sig den kritiske last. Måden relaksationen indføres på er, at lade de ikke-lineære størrelser blive bestemt af de forudgående to resultater i iterationen. Dvs. at $\{\delta w\}_{i-1}$ i ovenstående afsnit erstattes med $\{\delta w\}_\zeta$ givet ved

$$\{\delta w\}_\zeta = (1 - \zeta)\{\delta w\}_{i-1} + \zeta\{\delta w\}_{i-2} \quad 0 \leq \zeta < 1 \quad (12.1)$$

I Figur 12.1 er resultatet for et typisk iteration med og uden relaksation vist.

Det ses, at indførelse af en relaksation giver et "roligere" forløb frem til et plateau, hvor konvergens er opnået. Uden relaksation vil processen let divergere. Løsningen kommer så at sige på "forkert" spor, og flytningsfeltet springer frem og tilbage. Den største værdi af relaksationen er i afhandlingen valgt til 0,9.



Figur 12.1 – Iteration med og uden relaksation.

For at bestemme hvorvidt der er tale om en konvergeret løsning, ses der på, hvor godt de ikke-lineære ligevægtsligninger er løst. Til dette benyttes et relativt mål for normen, ψ , af restleddet.

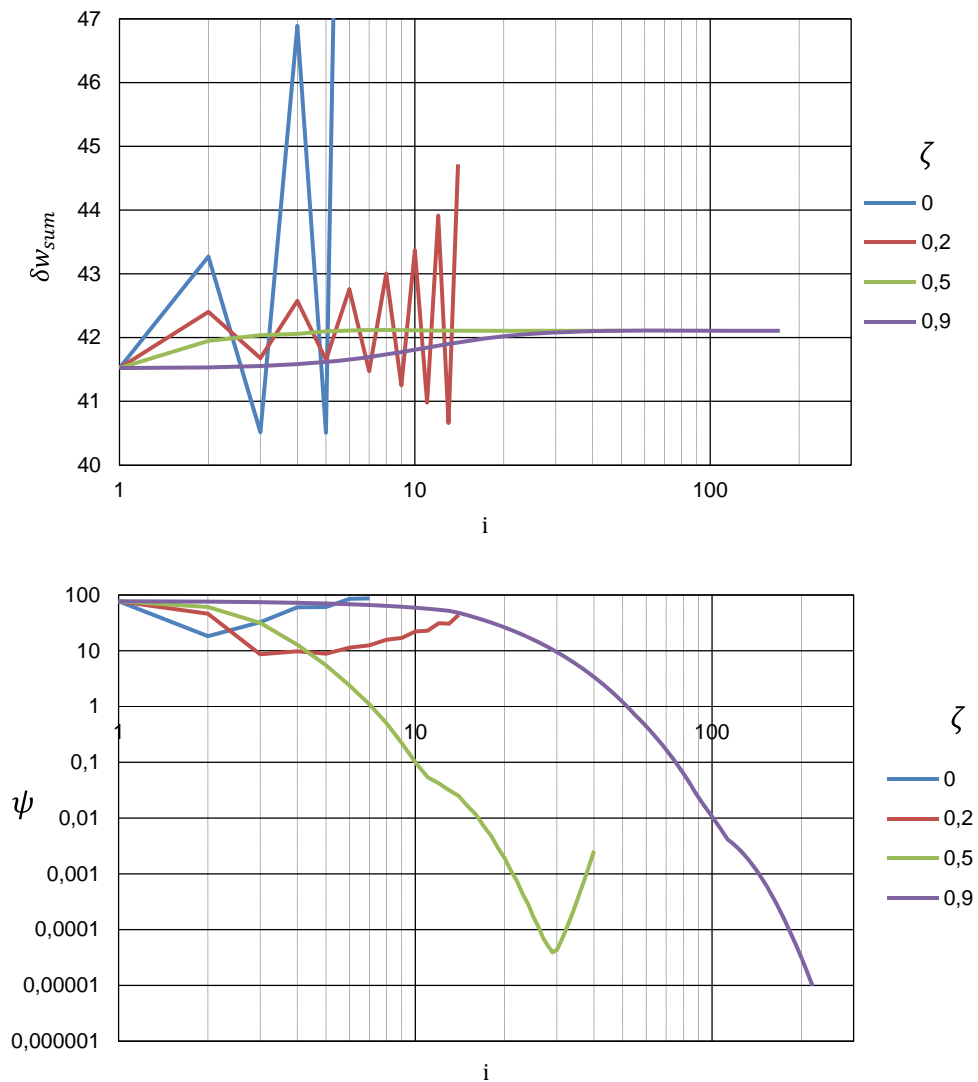
Restleddet bliver jf. (10.22)

$$\{rest\}_i = \left([A_{nl, RB}]_i + N_x[L] \right) \begin{Bmatrix} \{\delta u\} \\ \{\delta v\} \\ \{\delta w\}_{til,i} \end{Bmatrix} + N_x[L] \begin{Bmatrix} \{\delta u\} \\ \{\delta v\} \\ \{\delta w\}_{imp} \end{Bmatrix} \quad (12.2)$$

Dermed kan fejl-målet ψ bestemmes som

$$\psi = \frac{\|rest_i\|}{\left\| N_x[L] \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{w\}_{imp} \end{Bmatrix} \right\|} \quad (12.3)$$

I Figur 12.1 blev det illustreret, at med indførelse af en relaksation kan forløbet frem til resultatet blive mere roligt. Der ses nu på resultatet af en iterationsproces for en større belastning, end der blev brugt i Figur 12.1. I Figur 12.2 er resultatet af en sådan proces vist sammen med ψ -målet.



Figur 12.2 – Iterationsværdier δw_{sum} og ψ med og uden relaksation, som funktion af antal iterationer i .

Det ses, at ψ for $\zeta = 0$ og $\zeta = 0,2$ ikke når at aftage specielt meget, før ψ begynder at vokse igen. For $\zeta = 0,5$ har løsningen et umiddelbart tilfredsstillende forløb, men det ses, at ψ -målet pludseligt begynder at vokse, uden at resultatet dog ser ud til at divergere. Fortsættes iterationsprocessen vil δw_{sum} vise tegn på at divergere.

I det følgende vil en toleranceværdi for ψ blive bestemt.

12.1 Aksesymmetrisk imperfektion med bølger i skallens længderetning

Den første imperfektionsform, som vil blive undersøgt, er en aksesymmetrisk imperfektion med bølger i længderetningen.

Denne imperfektion er bl.a. studeret af Koiter (Koiter, 1945) (Koiter, 1963), Hutchinson (Hutchinson, 1965) og Tennyson og Muggeridge (Tennyson & Muggeridge, 1969), der alle er baseret på Donnells (Donnell, 1933) (Donnell, 1934) ikke-lineære skalteori, hvorfor alle undersøgelserne da også giver tilnærmelsesvis samme resultat. Senere er denne aksesymmetriske imperfektion undersøgt af Yamaki (Yamaki, 1984) med en bemærkelsesværdig forøgelse af bæreevnen til følge.

I denne afhandling benyttes en aksesymmetrisk imperfektion med sinusbølger i længderetningen med en halvbølgelængde tilnærmelsesvis lig med den klassiske halvbølgelængde, λ_{cl} , dog således at imperfektionen i begge rande er nul. Imperfektion kan dermed skrives som

$$\delta w_{imp}(x) = \alpha h \sin\left(\frac{\pi n_{w,cl}}{L} x\right) \quad (12.4)$$

Her er α en dimensionsløs imperfektionsamplitude

$$\alpha = \frac{\delta w_{imp,a}}{h} \quad (12.5)$$

hvor $\delta w_{imp,a}$ er imperfektionsamplituden og heltallet $n_{w,cl}$ er

$$n_{w,cl} = \text{Round}\left(\frac{L}{\lambda_{cl}}\right) \quad (12.6)$$

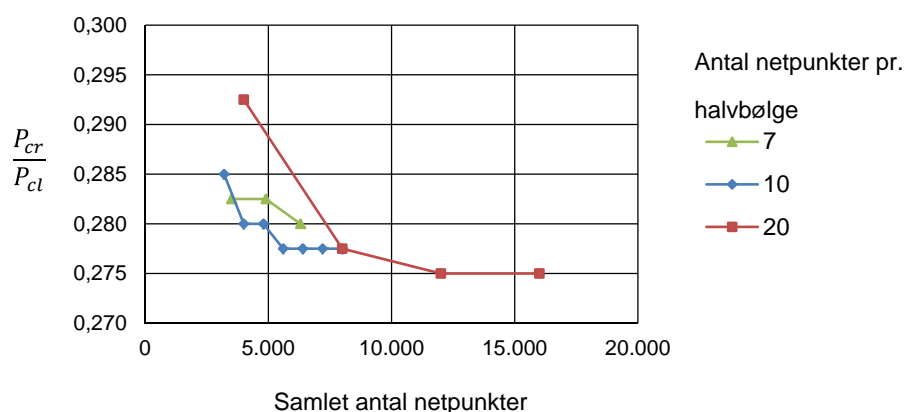
I denne formel er λ_{cl} bestemt ved

$$\lambda_{cl} = \frac{\pi}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}} \sqrt{Rh} \cong 1,73\sqrt{Rh} \quad (12.7)$$

Denne imperfektion adskiller sig dermed fra Koiters imperfektion ved at der bruges sinus- fremfor cosinusbølger. Det har dog vist sig, at benyttes cosinusbølger med en indadrettet imperfektion i begge ender fås samme resultat, som hvis sinusbølger benyttes.

12.1.1 Diskretisering og tolerance

Til vurdering af en tilpas fin diskretisering vurderes den kritiske last P_{cr} som funktion af antallet af netpunkter pr. imperfektions-halvbølge i længderetningen og antallet af netpunkter i omkredsretningen. Undersøgelsen er foretaget for to cylinderskaller med tykkelserne $h = 0,5$ mm og $h = 1$ mm begge med radius $R = 100$ mm og længden $L = 200$ mm. Hovedsagligt undersøges den relative imperfektions-amplitude $\alpha = 1,5$, dvs. imperfektionen er 1,5 gange tykkelsen, men enkelte undersøgelser udføres også med $\alpha = 0,5$ og $\alpha = 2,5$.

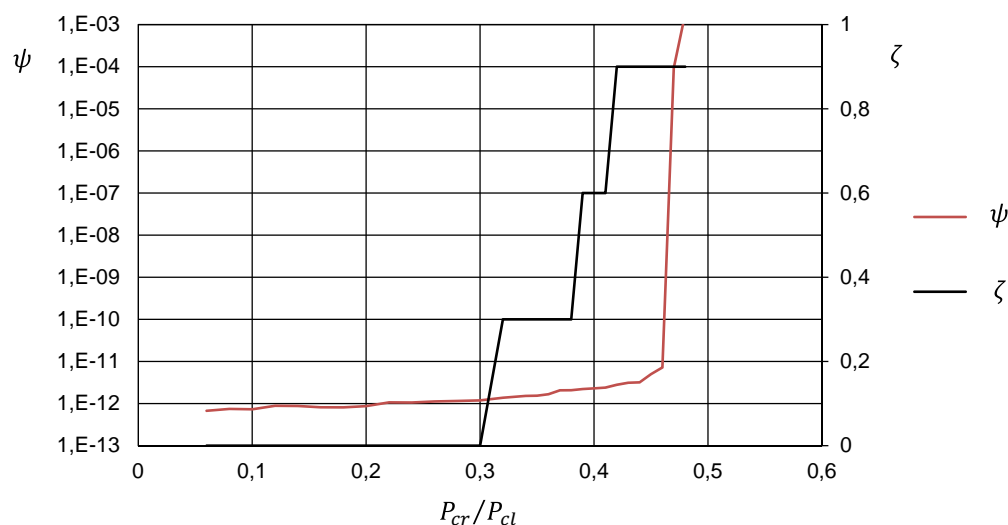


Figur 12.3 – Kritisk last ift. antal netpunkter, $h = 1$ mm, $R = 100$ mm, $L = 200$ mm og $\alpha = 1,5$

I Figur 12.3 er et repræsentativt resultat af en sådan undersøgelse vist. På baggrund af en samlet vurdering er en inddeling med 10 netpunkter pr. imperfektions-halvbølge i længderetningen og 900 netpunkter i omkredsretningen valgt for denne imperfektion. I dette tilfælde fører det til en afstand på 1,7 mm mellem punkterne i længderetningen og 0,7 mm i omkredsretningen. Desuden benyttes et maksimumkrav på afstanden mellem netpunkterne. I længderetningen er dette sat til $0,5\sqrt{Rh}$, mens det i omkredsretningen er $0,25\sqrt{Rh}$.

For at vurdere hvad tolerancen for ψ skal være, før et resultat kan godkendes som værende stabilt, vil der i det følgende blive set på sammenhængen mellem relaksationsfaktoren og det opnåede mest præcise resultat. De følgende resultater gælder for en cylinderskal med tykkelsen $h = 1$ mm radius $R = 100$ mm og længden $L = 200$ mm og for $\alpha = 0,5$

Figur 12.4 viser resultatet af et stort antal iterationer. Den røde kurve viser fejl-målet ψ som funktion af belastningen målt ift. den klassiske kritiske last. Den sorte kurve viser den mindste værdi af relaksationsfaktoren ζ , der giver et resultat hvor $\psi < 10^{-11}$. Det ses, at for voksende belastning skal ζ -værdien øges for at opfylde kravet.



Figur 12.4 – Røde kurve: ψ som funktion af den kritiske last (ψ aflæses på ordinaten tv.). Sorte kurve: Mindste ζ -værdi der giver et resultat hvor $\psi < 10^{-11}$, som funktion af den kritiske last (ζ aflæses på ordinaten th.).

Det ses også i Figur 12.4, hvordan fejl-målet ψ vokser svagt ved voksende belastning frem til at det pludseligt vokser dramatisk, fra $\psi < 10^{-11}$ til værdier omkring 10^{-4} ved en øgning af lasten svarende til $0,01P_{cl}$. Tilsvarende resultater er fundet for andre imperfektionsamplituder.

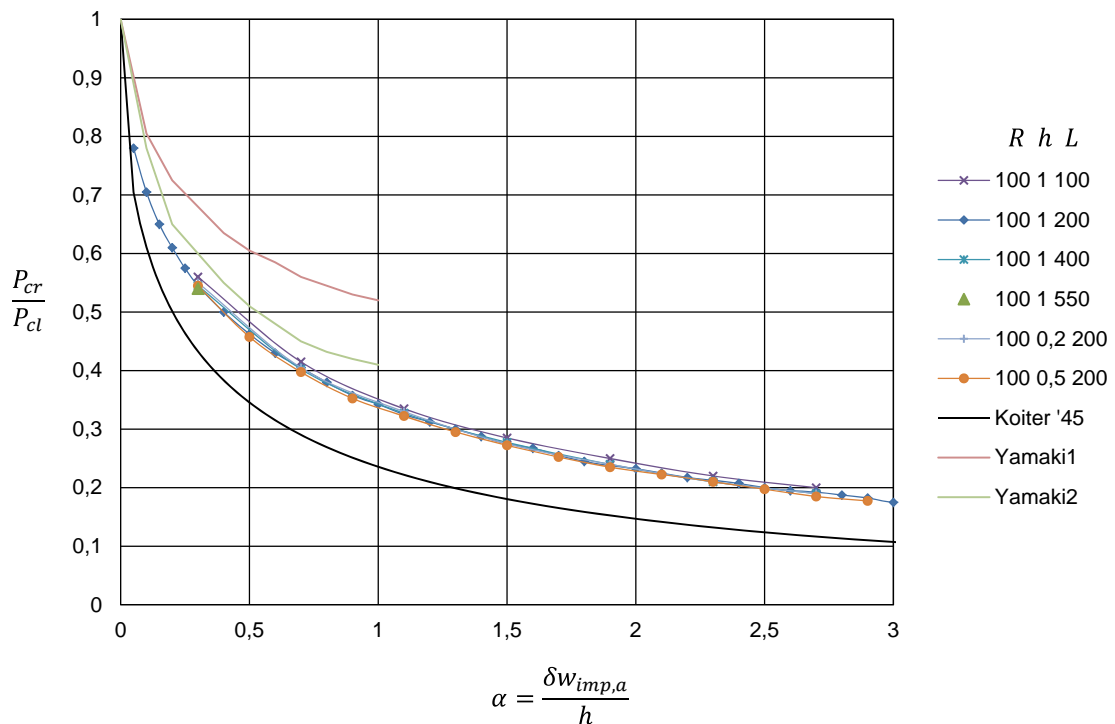
For at minimere antallet af iterationer vælges toleranceværdien for fejl-målet til $\psi = 10^{-7}$, idet det vurderes, at når dette mål opfyldes, vil $\psi \rightarrow 0$ uden pludseligt at vokse igen, som det fx ses for $\zeta = 0,5$ i Figur 12.2.

12.1.2 Resultat

Resultatet af undersøgelsen af en aksesymmetrisk imperfektion er i Figur 12.5 afbildet ift. imperfektionsamplituden α for fem skaller med egenskaber og imperfektions-halvbølger som anført i Tabel 12-1.

h [mm]	R [mm]	L [mm]	$n_{w,cl}$
0,2	100	200	26
0,5	100	200	16
1	100	100	6
1	100	200	12
1	100	400	24
1	100	550	32

Tabel 12-1 – Geometri og antal imperfektions-halvbølger



Figur 12.5 – Kritiske last ift. imperfektionsamplituden α for forskellige cylinderskaller.

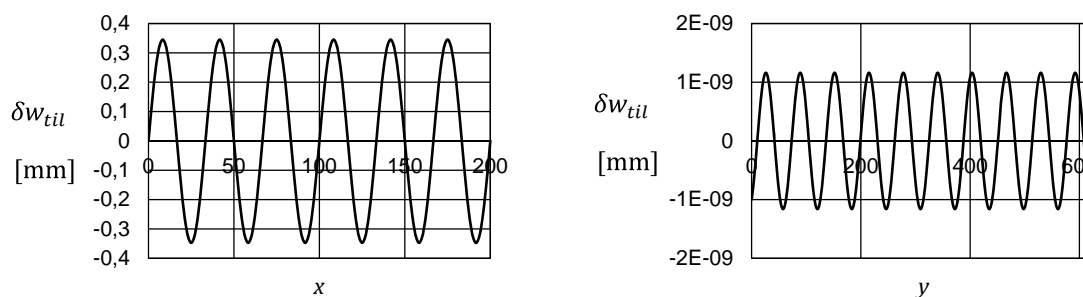
Det ses, at imperfektionens indvirkning på den kritiske last er tilnærmelsesvis identisk for de seks undersøgte cylinderskaller.

Sammenlignes resultaterne med Koiters '45-løsning ses det, at der her findes betydeligt højere bæreevner.

Yamaki arbejder med fire forskellige løsninger, hvor han fra løsning til løsning ser bort fra forskellige led i sine ligninger. Yamaki arbejder udelukkende med imperfektionsamplituder $\alpha \leq 1$. I Figur 12.5 er to af hans løsninger vist. "Yamaki1" er en løsning, hvor der ikke er udeladt nogle led, mens der i Yamaki2 er udeladt led. Det ses, at "Yamaki2" stemmer tilnærmelsesvis overens med resultaterne fundet i denne afhandling. Mens nærværende resultater reduceres yderligere flader hans kurve mere ud ved $\alpha = 1$. De to sidste af Yamakis fire løsninger er ikke vist her. De giver yderligere reduktion af bæreevnen ift. "Yamaki2".

I Yamakis meget grundige arbejde sammenlignes der også med en række forsøg. Forsøgsresultaterne er typisk placeret tæt på eller under kurven "Yamaki2".

Ses på tillægssflytninger for et typisk resultat (et punkt i Figur 12.5), se Figur 12.6, fremgår det at der udover tillægssflytninger i samme form som imperfektionerne også dannes bølger i omkredsretningen, om end de har meget lille amplitude.



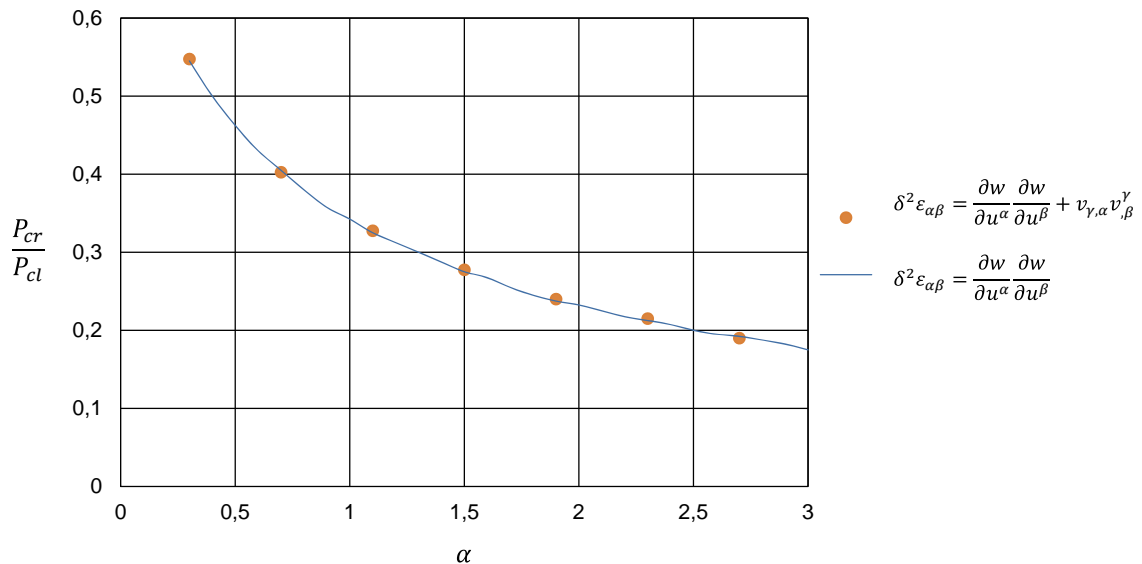
Figur 12.6 – δw_{til} tillægssflytninger for $\alpha = 0,3$, $h = 1 \text{ mm}$, $R = 100 \text{ mm}$, $L = 200 \text{ mm}$. Tv. længderetningen. Th. omkredsretningen.

Ikke alle resultater har dog vist lige så perfekte harmoniske i bølger i omkredsretningen, men det har i alle tilfælde været muligt at fastsætte antallet af bølger. Antallet af bølger i omkredsretningen m_w har vist sig at være uafhængigt af imperfektionsamplituden, og dermed er det altså udelukkende geometrien, der bestemmer antallet bølger i omkredsretningen, jf. Tabel 12-2.

h [mm]	R [mm]	L [mm]	n_w	m_w
0,2	100	200	26	20-23
0,5	100	200	16	13-14
1	100	100	6	10
1	100	200	12	9-10
1	100	400	24	9-10
1	100	550	32	10

Tabel 12-2 – Foldningsmønster for forskellige skaller.

Tidligere i afhandlingen, i afsnit 8, blev det foreslået, at det er tilstrækkeligt at medtage ikke-lineære led af formen $\frac{\partial \delta w}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \delta w}{\partial u^\beta}$. I Figur 12.7 er vist resultatet af en enkelt analyse, hvor ekstra ikke-lineære led af formen $\delta v_{\gamma,\alpha} \delta v_{\beta}^\gamma$ fra (7.18) medtages. Det kan umiddelbart ses, at disse led ikke har nogen indflydelse på resultatet.



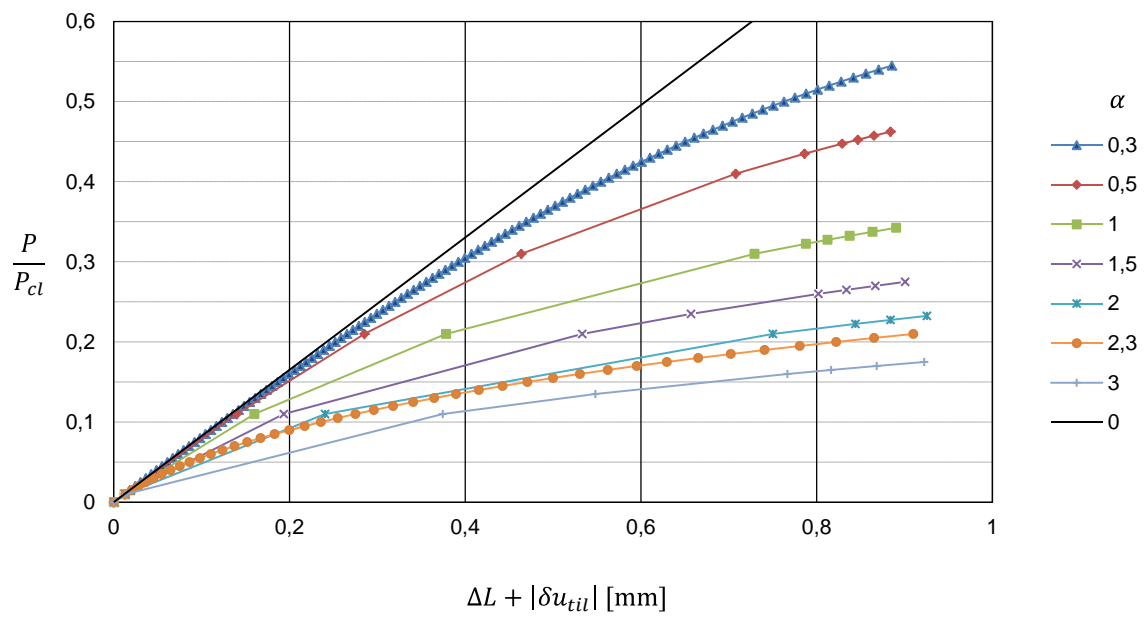
Figur 12.7 – Ekstra ikke-lineære led. $h = 1 \text{ mm}$, $R = 100 \text{ mm}$, $L = 200 \text{ mm}$

I Figur 12.8 og Figur 12.9 er arbejdskurverne for voksende imperfektionsamplitude vist for to af skallerne. Her er abscisserne den totale gennemsnitlige flytning i toppen, dvs. summen af flytningen fra foldningsanalysen og den lineærelastiske sammentrykning ΔL fra (9.2). Flytningen δu_{til} er tilnærmelsesvis konstant i omkredsretningen ligesom δw_{til} -flytningen.

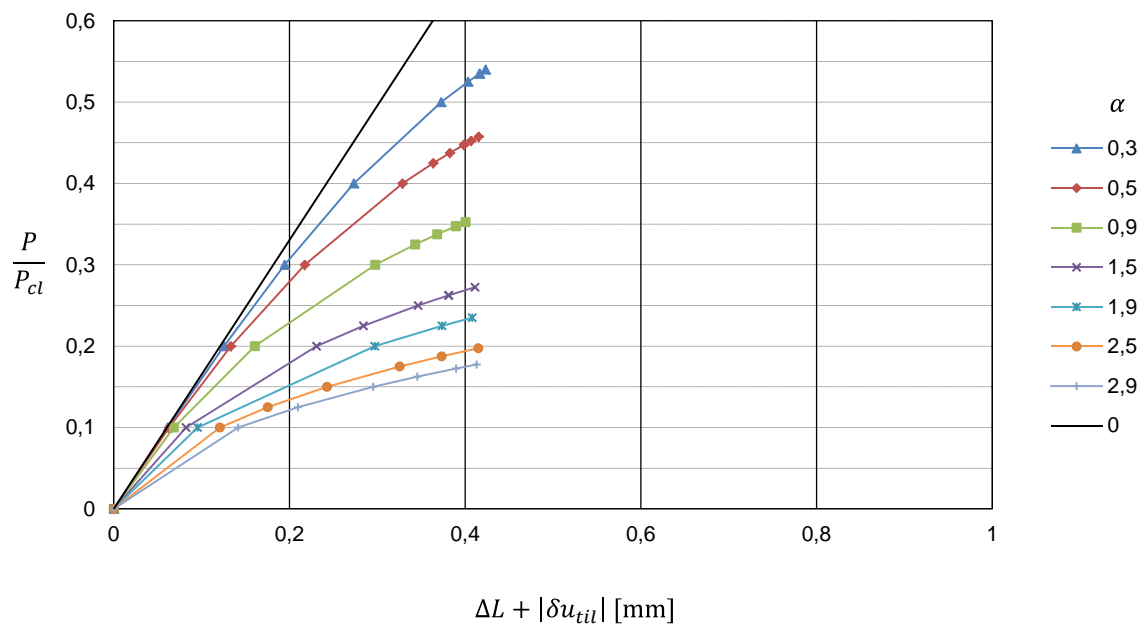
Det ses, at ved voksende imperfektionsamplitude bliver skallen betragteligt ”blødere” og for begge skaller bliver flytningen fra foldningsanalysen større end ΔL ved omkring $\alpha = 1$.

Det er ikke lykkedes at finde en vandret tangent på arbejdskurven omkring den kritiske last, som forventet jf. Figur 9.3. Med metoden udviklet i denne afhandling bliver skallen ustabil før dette niveau nås. Dette svarer til arbejdskurven for den perfekte skal, se Figur 9.2, hvor der er findes ligevægtsløsninger efter bifurkationspunktet uden nogen vandret tangent i bifurkationspunktet.

Sammenlignes Figur 12.8 og Figur 12.9 ses det, at ved at reducere skallens tykkelse bliver skallen ”hårdere” og den kritiske last indtræder mere uvarslet, jf. den perfekte skals opførsel ved en ikke-lineær analyse.



Figur 12.8 – Arbejdskurver for $h = 1$ mm, $R = 100$ mm, $L = 200$ mm



Figur 12.9 – Arbejdskurver for $h = 0,5$ mm, $R = 100$ mm, $L = 200$ mm

12.2 Kvadratisk bølgeimperfektion

I dette afsnit vil en imperfektion bestående af "kvadratiske" bølger blive undersøgt. Imperfektionen beskrives ved $m_{w,sq}$ bølger i omkredsretningen og $n_{w,sq}$ halvbølger i længderetningen, hvor halvbølgelængden λ_{sq} i begge retninger er givet ved

$$\lambda_{sq} = \sqrt{16\alpha} \sqrt{Rh} \quad (12.8)$$

Baggrunden for denne imperfektion findes i (Nielsen, 2001), hvor det er forsøgt at give en grov kvalitativ forklaring på imperfektionernes betydning for den cirkulære cylinderskals bæreevne. Det antages i første omgang, at der kun er imperfektioner i omkredsretningen. Endvidere antages, at imperfektionen deler skallen ind i kvadratiske plane skiver i hele skallens længde med bredden λ_{sq} . Bæreevnen af en sådan lang skive kan bestemmes som for en kvadratisk skive med sidelængderne λ_{sq} der er simpelt understøttet langs alle fire sider svarende til, at skiven folder i kvadratiske felter. Foldningslasten for den cirkulære cylinderskals bliver dermed

$$P_{cr} = 2\pi R h \sigma_{cr}, \quad \sigma_{cr} = \frac{4 \pi^2 E h^2}{12 \lambda_{sq}^2 (1 - \nu^2)} = \frac{\pi^2 E}{48\alpha(1 - \nu^2)} \frac{h}{R} \quad (12.9)$$

Det ses at med $\nu = 0,3$ fås $P_{cr}/P_{cl} = 0,37/\alpha$ jf. (11.2), hvilket i størrelsesorden svarer til Koiters løsning ved $\alpha > 1$, se Figur 12.11.

Når ovenstående imperfektion skal indføres i de numeriske beregninger, er det selvfølgelig nødvendigt at tilpasse antallet af bølger i længde- og omkredsretningen, således at halvbølgelængden tilnærmelsesvis bliver λ_{sq} . Dette vil naturligvis give nogle spring i bæreevnekurven, da kun et helt antal halvbølger i længderetningen og et heltal af bølger i omkredsretningen har mening. I Figur 12.11 er disse spring dog ikke indtegnet, da disse i modsætning til (12.9) afhænger af skallens radius og længde.

Imperfektionen kan skrives

$$\delta w_{imp}(x, y) = \alpha h \sin\left(\frac{\pi n_{w,sq}}{L} x\right) \cos\left(\frac{m_{w,sq}}{R} y\right) \quad (12.10)$$

Det bemærkes at formen på imperfektionen er tilsvarende Flügges foldningsmønster i δw -rummet.

Med denne imperfektionstype bliver det også muligt at vurdere forskellen i betydningen af hhv. imperfektionsbølger i længderetningen og imperfektionsbølger i omkredsretningen, som det blev gjort ved egenværdi analysen for den perfekte skal, se afsnit 11.2.

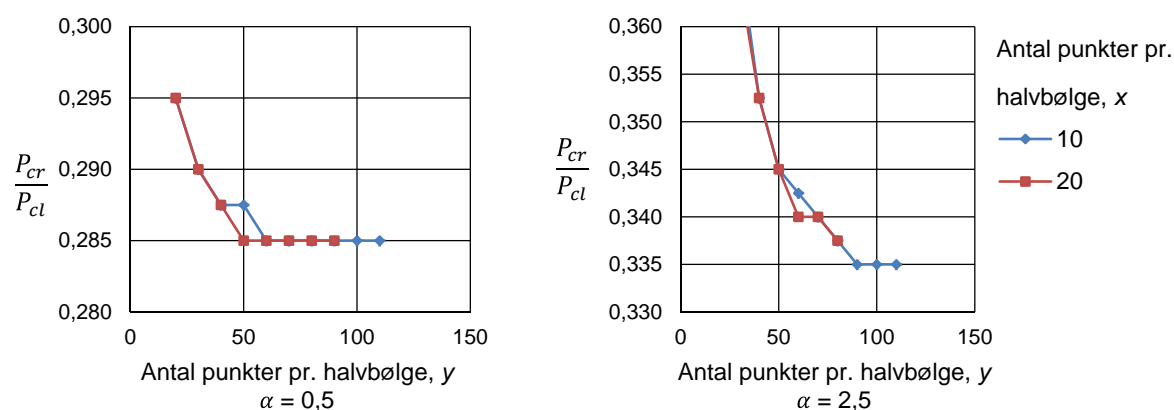
12.2.1 Diskretisering og tolerance

Der udføres igen en undersøgelse af det nødvendige antal netpunkter. Med imperfektioner i begge retninger vurderes resultatet ift. antal netpunkter pr. imperfektions- halvbølge i de to retninger.

I Figur 12.10 er et repræsentativt resultat af en sådan undersøgelse vist. Her er en skal med tykkelsen $h = 1$ mm, radius $R = 100$ mm og længden $L = 200$ mm undersøgt for imperfektions-amplituder på $\alpha = 0,5$ og $\alpha = 2,5$.

Resultatet er ikke helt entydigt i modsætning til situationen for den lineære foldningsanalyse. Dog ses det, at ved at fordoble antallet af netpunkter i længderetningen opnås ikke et tilsvarende mere præcist resultat. Derfor benyttes 10 netpunkter pr. imperfektions-halvbølge i længderetningen. Hertil føjes igen kriteriet for den maksimale afstand mellem netpunkterne i længderetningen på $0,5\sqrt{Rh}$.

I omkredsretningen er det fundet nødvendigt med 60 netpunkter pr. imperfektions-halvbølge, dog skærpes kravet yderligere til at maksimumafstanden mellem netpunkterne er $\frac{1}{14}\sqrt{Rh}$. For geometrien benyttet i Figur 12.10 svarer det til 88 netpunkter pr. halv bølge for $\alpha = 2,5$.



Figur 12.10 – Kritisk last ift. antal netpunkter, $h = 1$ mm, $R = 100$ mm, $L = 200$ mm, $\alpha = 0,5$ og $\alpha = 2,5$

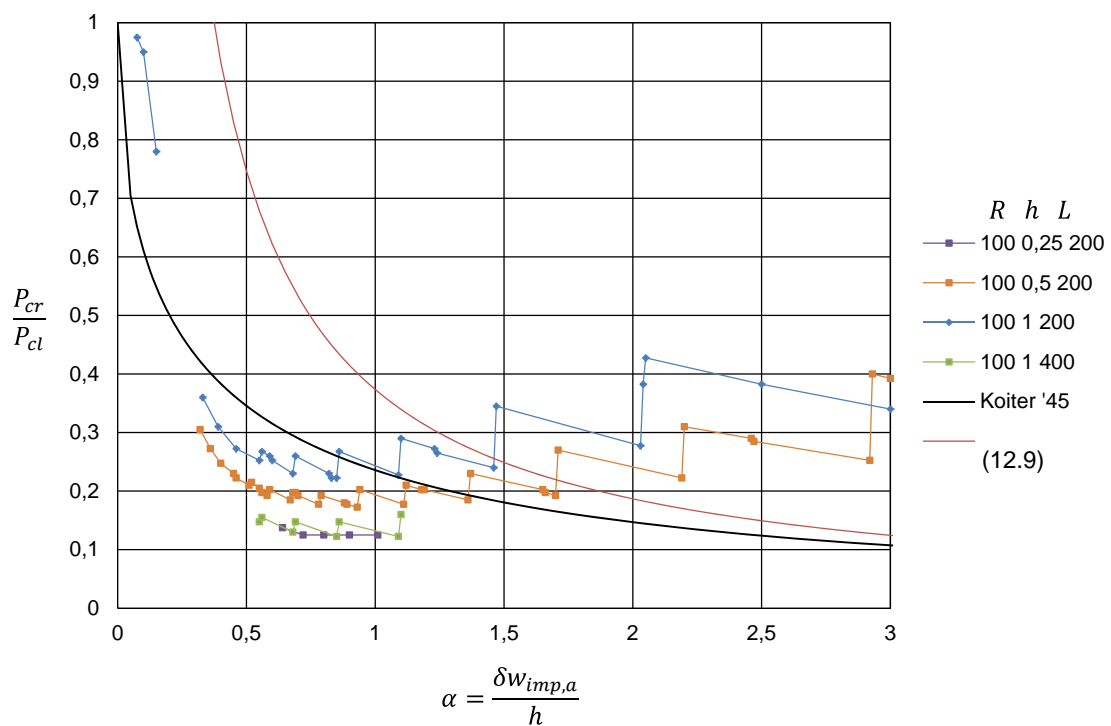
Tilsvarende undersøgelser til bestemmelse af ψ , som blev foretaget for den aksesymmetriske imperfektion i Figur 12.4, er udført for nærværende imperfektion. Samme tendens som for den aksesymmetriske imperfektion blev registreret, og derfor vælges igen $\psi = 10^{-7}$ som tolerance-værdi.

12.2.2 Resultat

Imperfektionernes betydning for bæreevnen er undersøgt for fire cylinderskaller jf. Tabel 12-3

h [mm]	R [mm]	L [mm]
0,25	100	200
0,5	100	200
1	100	200
1	100	400

Tabel 12-3 – Geometri



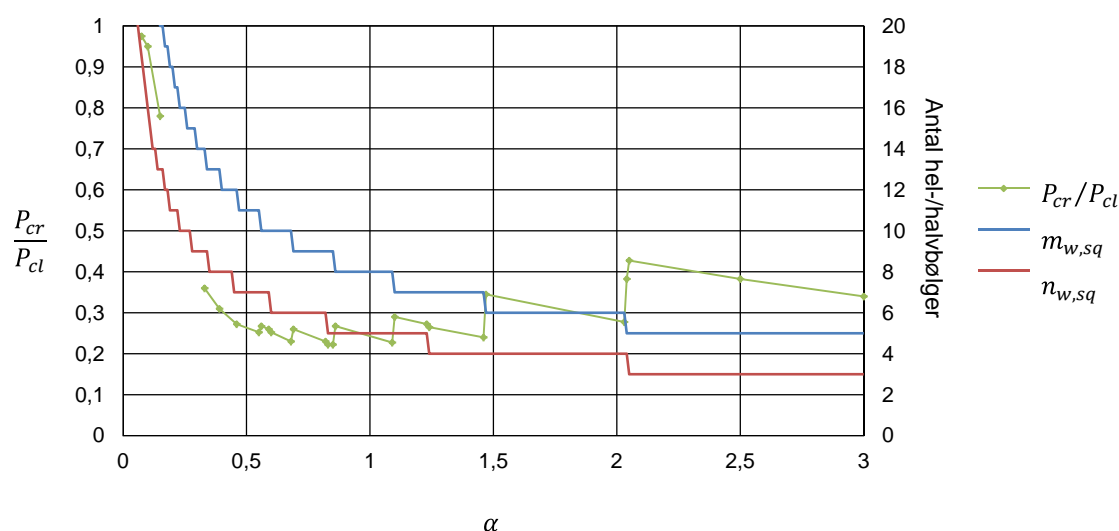
Figur 12.11 – Kvadratisk bølgeimperfektion

Resultatet af disse beregninger er vist i Figur 12.11, hvor også (12.9) er vist.

Det ses, at en imperfektion i begge retninger, hvor imperfektionsbølgelængden afhænger af imperfektionsamplituden, giver et meget interessant resultat, idet bæreevnen kan vokse med øget imperfektionsamplitude. Her fås et savtakket forløb, hvor den kritiske last jævnt set aftager frem til ca. $\alpha = 1$, hvorefter bæreevnen igen vokser. For $h = 0,25$ mm er den kritiske værdi kun bestemt for α -værdier, som skønnes at give en kritisk last, der ligger i bunden af "savtakkerne"

I modsætning til den aksesymmetriske imperfektion har både L/R -forholdet og R/h -forholdet her stor betydning for bæreevnen.

Årsagen til den savtaktede kurve skal findes i den måde, imperfektionen er defineret på. Her er imperfektionsbølgelængden, i modsætning til forholdene ved den aksesymmetriske imperfektion, afhængig af imperfektionsamplituden. I Figur 12.12 er den kritiske last afbilledet sammen med antallet af hhv. hel- og halvbølger i de to retninger ift. imperfektionsamplituden.



Figur 12.12 – Ordinatat tv. P_{cr}/P_{cl} ift. α . Ordinatat th. antal hel-/halvbølger ift. α . $h = 1 \text{ mm}$, $R = 100 \text{ mm}$, $L = 200 \text{ mm}$

Betragt først den blå og den røde kurve. Her fremgår det, at antallet af bølger i begge retninger mindskes med øget imperfektionsamplitude. Betragt dernæst den grønne kurve, der viser den kritiske last ift. den klassiske kritiske last. Heraf fremgår det, at den kritiske last minskes når antallet af halvbølger i længderetningen reduceres. Den modsatte effekt har en reducere af antallet af bølger i omkredsretningen. Det ses således, at de karakteristiske spring i kurven defineres af bølgerne i omkredsretningen.

Tendensen opretholdes dog ikke, når antallet af halvbølger i længderetningen reduceres fra 4 til 3 ved hhv. $\alpha = 2,04$ og $\alpha = 2,05$. Her vokser lasten til trods for at antallet af bølger i omkredsretningen for begge værdier er 5.

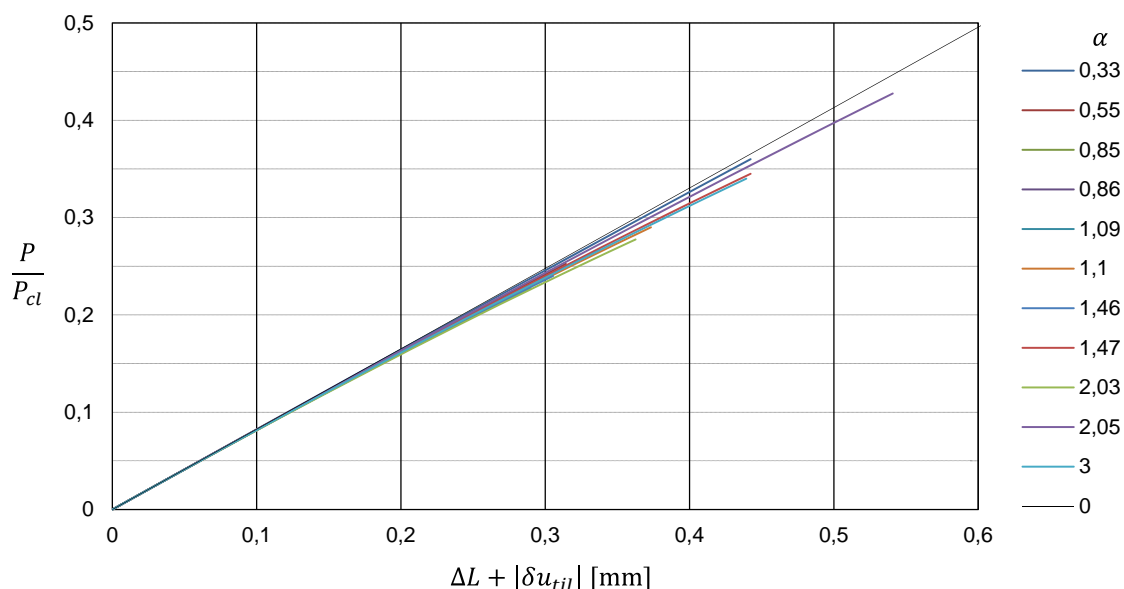
I intervallet fra $\alpha = 0,15$ til $\alpha = 0,33$ er der ikke foretaget undersøgelser, idet beregningerne på denne del af kurven kræver et meget stort antal netpunkter. Generelt er valget af punkter som er undersøgt foretaget på baggrund af udviklingen i bølgetallene.

Som tidligere er det fundet, at δw_{til} tillægflytningerne har samme form som imperfektionen, hvilket for dette tilfælde betyder, at foldningsmønstreret i begge retninger er veldefineret.

Bemærk at kurven svarende til (12.9), i Figur 12.11, stort set falder sammen med Koiter-kurven, hvis den forskydes ca. $0,5\alpha$ til venstre, dvs. svarende til, at α erstattes med $1,5\alpha$. Denne virkning kan tolkes som bidraget fra imperfektionerne i længderetningen.

I Figur 12.13 er arbejdskurvene for et udvalg af α -værdier vist. Det er tydeligt, at den kvadratiske imperfektion giver betydeligt mindre gennemsnitlige tillægflytninger i toppen, end tilfældet var for den aksesymmetriske imperfektion.

Dette antyder, at imperfektioner med kvadratiske bølger i langt mindre grad reducerer den perfekte skals stivhed. Derimod gør de skallen mere ustabil, hvilket betyder at foldning sker meget pludseligt.

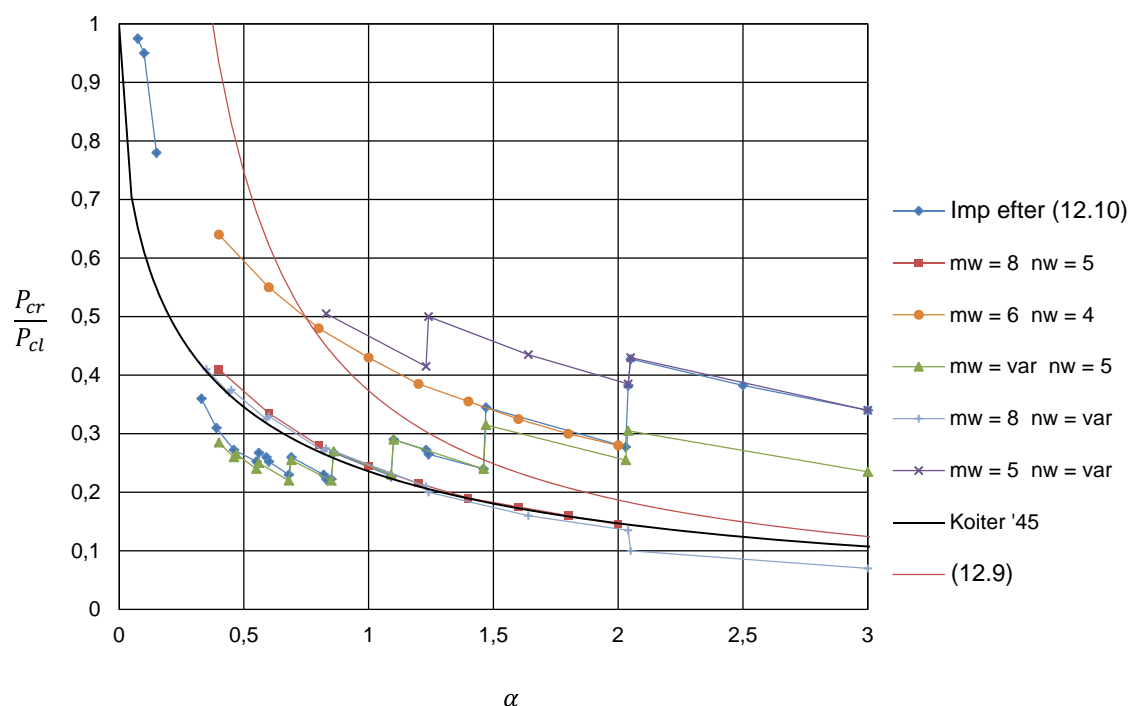


Figur 12.13 – Arbejdskurver for forskellige α -værdier. P/P_{cl} som funktion af den gennemsnitlige samlede flytning i toppen. $h = 1 \text{ mm}$, $R = 100 \text{ mm}$, $L = 200 \text{ mm}$

For bedre at forstå indvirkningen på bæreevnen af imperfektioner med bølger i begge retninger er der udført følgende beregninger, hvor antallet af imperfektionsbølger delvist eller helt gøres uafhængige af imperfektionsamplituden.

Således er den kritiske last i Figur 12.14 vist for følgende tilfælde af voksende imperfektionsamplituder:

- $m_w = 8$ og $n_w = 5$, bølgetallet i de to retninger holdes konstant svarende til imperfektionen ved $\alpha = 1$ i (12.10).
- $m_w = 6$ og $n_w = 4$, bølgetallet i de to retninger holdes konstant svarende til imperfektionen ved $\alpha = 2$.
- $n_w = 5$, bølgetallet i længderetningen holdes konstant. Antallet af bølger i omkredsretningen varierer mht. α , som beskrevet i (12.10).
- $m_w = 8$, bølgetallet i omkredsretningen holdes konstant. Antallet af bølger i længderetningen afhænger af α .
- $m_w = 5$, bølgetallet i omkredsretningen holdes konstant. Antallet af bølger i længderetningen afhænger af α .



Figur 12.14 – Kvadratisk bølgeimperfektion med konstant antal imperfektionsbølger i en eller begge retninger, $h = 1 \text{ mm}$, $R = 100 \text{ mm}$, $L = 200 \text{ mm}$

Betragt først de to undersøgelser, hvor imperfektionsformen holdes konstant i begge retninger. Kurverne er optegnet i intervallet fra $\alpha = 0,4$ til $\alpha = 2$. Begge kurver er jævnt aftagende for voksende imperfektionsamplitude og kurven med $m_w = 8$ og $n_w = 5$ er stort set sammenfaldende med Koiters løsning i det undersøgte interval. Forskellen i den kritiske last for de to kurver er betragtelig. Genkend nu resultatet fra den lineære analyse, se Figur 11.9. Sammenlignes de to kurver for $m_w = 8$ og $m_w = 6$ med hhv. $n_w = 5$ ($\frac{L}{Rn_w} = 0,4$) og $n_w = 4$ ($\frac{L}{Rn_w} = 0,5$) ses, at der også her er en betragtelig forskel (punktet for $\frac{L}{Rn_w} = 0,4$ blev i Figur 11.9 bestemt for $m_w = 8$, men på

baggrund af tilsvarende undersøgelser i afsnit 11 er det forventelig, at dette punkt vil ligge tæt på kurven for $m_w = 9$)

Betragt dernæst kurven med 5 imperfektionsbølger i længderetningen i Figur 12.14. Kurven er optegnet i intervallet fra $\alpha = 0,4$ til $\alpha = 3$, svarende til 12 til 5 bølger i omkredsretningen. Her fås tilnærmelsesvis samme resultat som ved imperfektionsformen defineret i (12.10) op til imperfektionsamplituder på omkring $\alpha = 1,5$, svarende til overgangen fra 7 til 6 imperfektionsbølger i omkredsretningen. Herefter bliver den kritiske værdi for 5 og 6 imperfektionsbølger i omkredsretningen mindre end svarende til imperfektionen i (12.10). Betrakt dernæst igen resultaterne af egenværdianalysen gengivet i Figur 11.9. Her ses stor spredning for kurverne omkring $n_w = 5$ ($\frac{L}{Rn_w} = 0,4$), hvor kurverne med flest bølger i omkredsretningen giver de mindste kritiske værdier. Dette resultat genspejles i Figur 12.14, hvor den kritiske last øges ved en reducere af bølgeantallet i omkredsretningen. Mellem springene er kurven aftagende, hvilket tilskrives den voksende imperfektionsamplitude.

Til slut ses på de to kurver svarende til konstant antal bølger i omkredsretningen. Kurvernes forløb er forskellige. Kurven for $m_w = 8$ har små voksende spring ved de mindste α -værdier, mens den har et større spring ved $\alpha = 2,1$. Kurven for $m_w = 5$ har tydelige voksende spring både ved $\alpha = 1,23$ og $\alpha = 2,1$. Igen er analogien til resultaterne i afsnit 11 tydelig, idet kurven for $m_w = 8$ i intervallet fra 5 til 3 bølger i længderetningen (fra $\frac{L}{Rn_w} = 0,4$ til $\frac{L}{Rn_w} = 0,66$) her er svagt aftagende, mens kurven for $m_w = 5$ er kraftig voksende i det samme interval.

Imperfektionsformen med bølger i begge retninger er altså tydeligt afhængig af den perfekte skals opførsel, hvilket også arbejdskurverne indikerer. Skallens bæreevne er altså ikke blot afhængig af imperfektionernes amplitude men i lige så høj grad af imperfektionens form.

13 Konklusion

DEL 1 - GENEREL SKALTEORI

I første del af afhandlingen blev en simpel metode til stabilitetsbestemmelse for en vilkårlig skalkonstruktion præsenteret. Den benyttede metode er først den såkaldte ligevægtsmetode, hvor en nærliggende ligevægtstilstand betragtes. Denne metode vil for de fleste ingeniører være umiddelbart fysisk forståelig, og der kræves kun et basalt kendskab til variationregning.

Den benyttede metode baseret på variationsregning har så vidt bekendt kun været sporadisk brugt tidligere jf. (Nielsen, 1964) og (Nielsen, 1968). Metoden har den fordel, at man automatisk får de led frem, som skal med i en lineær teori.

Med tilnærmede ligevægtsligninger opskrevet i den udeformerede tilstand og med konstitutive ligninger, hvor forskydningskræfternes bidrag til deformationer negligeres, er det vha. metoden muligt at opstille ligninger til bestemmelse af kritiske belastninger.

Randbetingelser blev derefter opstillet for nærliggende ligevægtstilstande. Det blev vist, at pga. negligeringen af forskydningskræfternes bidrag til deformationerne er det nødvendigt at udlede randbetingelserne ved energibetragtninger på samme måde, som det oprindeligt blev gjort af Kirchhoff i pladeteorien.

En alternativ metode til ligevægtsmetoden er den såkaldte energimetode. Denne beskrives kun kort i afhandlingen. Når denne metode benyttes er variationsregning et kendt hjælpemiddel.

De konstitutive ligninger blev udviklet på baggrund af de konstitutive ligninger i skive og pladeteorien, hvilket typisk gøres i klassisk skalteori for at gøre den så simpel som mulig.

Endelig er det i afhandlingen vist, hvorledes en simpel geometrisk ikke-lineær teori kan formuleres.

DEL 2 - AKSIALT BELASTET CIRKULÆR CYLINDERSKAL

I den anden del af afhandlingen blev de udviklede stabilitetsligninger anvendt på en aksialt belastet cylinderskal. Dette er en konstruktion og en belastning, som er kendt for at være meget følsom overfor imperfektioner.

Det blev valgt at benytte differensmetoden ved de numeriske beregninger. Vha. simple andenordens differensoperatorer blev de udledte differentialligninger oversat til et system bestående af lineære ligninger. En simpel iterationsmetode blev indført til løsning af de ikke-lineære ligninger.

Vha. ligevægtsmetoden med de dertil hørende randbetingelser blev det vist, hvorledes Flüggens kendte løsning for den perfekte skal kan reproducere. Dette verificerer ikke blot den udviklede teori men også den anvendte differensmetode.

Til slut blev to imperfektionstyper undersøgt. De ikke-lineære beregninger viste sig at være en krævende opgave, både hvad angår den nødvendige diskretisering, og hvad angår ligningernes løsning. For at få stabile løsninger viste det sig hensigtsmæssigt at benytte en passende valgt relaksationsfaktor.

For en aksesymmetrisk imperfektion blev seks forskellige skaller undersøgt, og det blev vist, at deres kritiske lasts følsomhed over for imperfektionsamplituden var tilnærmelsesvis sammenfaldende. Resultaterne blev sammenlignet med to kendte og respekterede arbejder af hhv. Koiter og Yamaki. De fundne løsninger placerede sig midt imellem Koiters og Yamakis mest præcise løsning, mens de lå meget tæt på Yamakis anden løsning.

For imperfektioner med bølger i to retninger blev et meget interessant resultat fundet. Der er et tydeligt samspil mellem den perfekte skals lineære "Flügge-løsning" og imperfektionsformen. Tilsyneladende gælder det, at de egenskaber der definerer den perfekte skal, også til en vis grad bestemmer opførslen af den imperfekte skal uanset imperfektionsformen.

Med denne afhandling er det hermed vist, at det er muligt at opstille en forholdsvis simpel og konsistent teori for skaller.

Forslag til videre arbejde

Den primære opgave er en yderligere verificering af teorien ved at sammenligne med forsøg. Dette er selvfølgelig forsøgt gjort under nærværende arbejde, men det har vist sig meget svært at få adgang til de nødvendige informationer fra tidligere udførte laboratorieforsøg.

Desuden vil en "oversættelse" til et elementmetodeprogram være naturlig, da det vurderes at dette vil kunne føre til mere præcise resultater på en mere effektiv måde end ved at benytte den simple differensmetode. Desuden vil dette også gøre det muligt at undersøge skaller af mere kompliceret form end cylinderskallen og mere komplicerede belastninger.

Desuden må teorien udvides til at dække plastiske deformationer, idet det er forventeligt, at imperfektioner af forskellig art, specielt ved store amplituder, kan føre til at materialets flydegrænse nås lokalt.

Der bør endelig arbejdes videre med forsøg på at opstille simple tilnærmelsesformler for virkningen af imperfektioner. I nærværende projekt blev der gjort en del forsøg i denne retning uden at opnå tilfredsstillende resultater. Før der går videre ad denne vej, bør "biblioteket" af nøjagtige løsninger, samt som nævnt ovenfor, deres sammenligning med forsøg udbygges væsentlig.

14 Citerede værker

Bažant, Z. P. & Cedolin, L., 1991. *Stability of Structures - Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*. New York: Oxford University Press.

Bryan, G. H., 1891. On the Stability of a Plane Plate under Thrusts in its own Plane, with Applications to the "Buckling" of the Sides of a Ship. *London Math. Soc., Proc.*, Volume 22, p. 54.

Bræstrup, M. W., 1970. *The Cosserat Surface and Shell Theory, Rapport nr R11*, København: Danmarks Tekniske Højskole, Afdeling for Bærende Konstruktioner.

Budiansky, B. & Sanders, J. L. J., 1962. *On the 'best' first-order linear shell theory*, s.l.: Office of Naval Research Technical Report No. 14.

Bushnell, D., 1974. *BOSOR5 – A Computer Program for Buckling of Elastic-Plastic Complex Shells of Revolution Including Large Deflections and Creep*, s.l.: Lockheed Missiles & Space Company, Inc. Report LMSC-D407166.

Cosserat, E. & Cosserat, F., 1909. *Théorie des Corps déformables*. Paris: A. Hermann et Fils.

Donnell, L. H., 1933. *Stability of thin-walled tubes under torsion*, s.l.: NASA Rep. No 479.

Donnell, L. H., 1934. A new theory for buckling of thin cylinders under axial compression and bending. *Trans. ASME Aero. Eng.*, Volume AER-56-12, pp. 795-806.

Flügge, W., 1960. *Stresses in shells*. Berlin: Springer-Verlag.

Flügge, W., 1973. *Stresses in Shells. Second Edition*. New York: Springer-Verlag.

Goldenveizer, A. L., 1961. *Theory of Elastic Thin Shells*. Oxford: Pergamon Press.

Goldstein, H., Poole, C. & Safko, J., 2000. *Classical Mechanics*. 3ed ed. s.l.:Addison-Wesley.

Green, A. E. & Zerna, W., 1954. *Theoretical Elasticity*. Oxford: Oxford University Press.

Hoff, N. J., 1966. The perplexing behaviour of thin cylindrical shells in axial compression. *Israel Journal of Technology*, 4(1), pp. 1-28.

Hutchinson, J., 1965. Axial Buckling of Pressurized Imperfect Cylindrical Shells. *AIAA JOURNAL*, 3(8), pp. 1461-1466.

Johansen, E. S., 1941. *Mekanisk Fysik I..* København: Jul. Gjellerups Forlag.

- Kempner, J., 1954. Postbuckling Behavior of Axially Compressed Circular Cylindrical Shells. *Journal of Aeronautical Sciences*, 21(5), p. 329.
- Kirchhoff, G. R., 1850. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Volume 40, p. 51–88.
- Knowles, J. K. & Reissner, E., 1957. A derivation of the equations of shell theory for general orthogonal coordinates. *Journal of Mathematical Physics*, Volume 35, pp. 351-358.
- Koiter, W. T., 1945. *Over de stabiliteit van het Elastisch Evenwicht ("On the stability of elastic equilibrium")*. Doktorafhandling, Delft: H. J. Paris, Amsterdam.
- Koiter, W. T., 1960. *A Consistent First Approximation in the General Theory of Thin Elastic Shells*. Delft, North-Holland, pp. 12-33.
- Koiter, W. T., 1963. The effect of axisymmetric imperfections on the buckling of cylindrical shells under axial compression. *Kon. Neder. Acad. Wet.*, Volume B 66, pp. 265-279.
- Leggett, D. M. A. & Jones, R. P. N., 1942. *The Behavior of a Cylindrical Shell under Axial Compression when the Buckling load has been Exceeded*, s.l.: British Aeronautical Research Committee Rand M 2190.
- LeVeque, R. J., 2007. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*. s.l.:SIAM.
- Lord Kelvin & Tait, P. G., 1888. *Treatise on Natural Philosophy*. Cambridge: University Press.
- Lorenz, R., 1908. Achsensymmetrische Verzerrungen in dünnwandigen Hohlzylindern. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 52(43), pp. 1706-1713.
- Lorenz, R., 1911. Die nicht achsensymmetrische Knickung dünnwandiger Hohlzylinder. *Physikalische Zeitschrift Leipzig*, 12(7), pp. 241-260.
- Love, A. E. H., 1892-93. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. s.l.:Cambridge University Press.
- Michielsen, H. F., 1948. The Behavior of Thin Cylindrical Shells after Buckling under Axial Compression. *Journal of Aeronautical Sciences*, Volume 14, p. 738.
- Nielsen, M. P., 1964. On the formulation of linear theories for thin shells. *Byggningsstatiske Meddelelser*, 35(2).

- Nielsen, M. P., 1968. Om stabilitetsteorien for kontinuierlige systemer. *Bygningsstatistiske Meddelelser*, 39(1), pp. 32-51.
- Nielsen, M. P., 1976. *Mekanik 0.3 - Kontinuummekanik*. Lyngby: Danmarks Tekniske Universitet.
- Nielsen, M. P., 2001. *Beton 2 del 5 - Skalkonstruktioner*. Lyngby: Danmarks Tekniske Universitet.
- Nielsen, M. P., 2004. *Mekanik 0.5 - To-dimensionale systemer*. Lyngby: Danmarks Tekniske Universitet.
- Nielsen, M. P. & Harder, N. A., 2004. *Mekanik 0.0 - Træk af mekanikkens historiske udvikling*. Lyngby: Danmarks Tekniske Universitet.
- Nielsen, M. P. & Rathkjen, A., 1981. *Mekanik 5.1 del 1 - Skiver og plader*. Aalborg/København: Den private Ingeniørfond ved Danmarks tekniske Højskole.
- Nielsen, M. P., Rathkjen, A. & Hansen, L. P., 1977. *Mekanik 3.1 - Spændinger og deformationer i plane bjælker*. Aalborg/København: Den Private Ingeniørfond.
- Novozhilov, V. V., 1959. *The Theory of Thin Shells*. Groningen: P. Noordhoff.
- Sanders, J. L. J., 1959. *An Improved First-Approximation Theory for Thin Shells*, s.l.: NASA Technical Report R-24.
- Sanders, J. L. J., 1963. Nonlinear theories for thin shells. *Quart. Appl. Math.*, 21(1), pp. 21-36.
- Tennyson, R. C. & Muggeridge, D. B., 1969. Buckling of Axisymmetric Imperfect Circular cylindrical shells under Axial Compression. *AIAA JOURNAL*, 7(11), pp. 2127-2131.
- Timoshenko, S. P., 1910. Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 58(4), pp. 378-385.
- Timoshenko, S. P., 1934. *Theory of Elasticity*. New York: United Engineering Trustees Inc..
- Timoshenko, S. P., 1953. *History of Strength of Materials*. New York: McGraw-Hill Book Company.
- von Kármán, T., Dunn, L. & Tsien, H.-S., 1940. The influence of curvature on the buckling characteristics of structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 7(7), pp. 276-289.

von Kármán, T. & Tsien, H.-S., 1941. The Buckling of Thin Cylindrical Shells Under Axial Compression. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 8(8), pp. 303-312.

Yamaki, N., 1984. *Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells*. North-Holland: Elsevier.

Yoshimura, Y., 1955. On the mechanism of buckling of a circular cylindrical shell under axial compression. *NACA Technical Memorandum*, Volume 1390.

Stabilitetsteori for skaller betragtes ofte som et kompliceret emne. Derfor er der i denne afhandling udviklet en simpel og systematisk metode til formulering af teorier for skalkonstruktioner.

Stabilitetsteorien, som fremkommer ved sådanne ikke-klassiske betragtninger, er benyttet til stabilitetsbestemmelse for en cylinderskal under aksialt tryk. Dels er den perfekte skal undersøgt, og dels er betydningen af geometriske imperfektioner undersøgt ved ikke-lineære beregninger.

Det er hermed vist muligt at opstille en forholdsvis simpel og konsistent teori for bestemmelse af skalkonstruktioners bæreevne.

DTU Civil Engineering
Technical University of Denmark

Brovej, Bygning 118
2800 Kongens Lyngby

www.byg.dtu.dk

ISBN 9788778774385
ISSN 1601-2917